Frequenza relativa e probabilità

La **probabilità** è un numero che indica con quale frequenza relativa si presentano **eventi** associati ad un insieme di possibili **risultati** di un "***esperimento***".

Esempio:

- **Esperimento**: Lancio "casuale" di un dado
- **Risultato**: Numero sulla faccia superiore del dado
- **Insieme dei possibili risultati** (elementari): $S=\{1,2,3,4,5,6\}$
- **Evento**: qualsiasi sottoinsieme dell'insieme dei risultati $A=\{1,2\}$; $B=\{2,4,6\}$; ecc.

Se si esegue un numero N di prove sufficientemente elevato la **frequenza relativa** dei singoli risultati ($k=1,2,3,4,5,6$) (o di un qualsiasi evento A) converge ad un numero che è la **probabilità** dell'evento A:

$$f_A = \frac{N_A}{N} \approx P(A)$$

Probabilità: proprietà e regole di calcolo

La probabilità è un numero compreso tra 0 (evento impossibile) e 1 (evento certo)

$$0 \le P(A) \le 1$$

L'insieme S di tutti i possibili risultati è l'evento certo

$$P(S) = 1$$

La probabilità dell'unione (**<u>or</u>**) di 2 eventi è uguale alla somma delle probabilità meno la probabilità della loro intersezione

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

La probabilità dell'intersezione (**<u>and</u>**) di 2 eventi è uguale alla probabilità di un evento condizionato alla realizzazione del secondo, moltiplicata per la probabilità dell'evento

$$P(AB) = P(A/B) \cdot P(B)$$

Esempio del calcolo di probabilità dell’unione

Calcolare la probabilità dell’unione dei seguenti eventi:
A = uscita dei numeri {1,2,3} sulla roulette
B = uscita di un numero pari sulla roulette

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{3}{37}+\frac{18}{37}-P(AB)$$

$$P(AB)=P(A/B)\cdot P(B)=\frac{1}{18}\cdot\frac{18}{37}=\frac{1}{37}$$

$$P(AB)=P(B/A)\cdot P(A)=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{37}=\frac{1}{37}$$

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{3}{37}+\frac{18}{37}-\frac{1}{37}=\frac{20}{37}$$

Teorema di Bayes

$$\boxed{P(AB) = P(A/B) \cdot P(B)}$$

$$\boxed{P(A/B) = P(B/A) \cdot \frac{P(A)}{P(B)}}$$

$$\boxed{P(AB) = P(B/A) \cdot P(A)}$$

Esempio 1 teorema di Bayes

60% biglietti vincenti (V) 40% biglietti perdenti (P)
70% dei biglietti vincenti e tutti quelli perdenti sono rossi (R)
Calcolare la probabilità che scelto un biglietto rosso sia vincente

$$P(V/R) = P(R/V)\cdot\frac{P(V)}{P(R)} =$$

$$= P(R/V)\cdot\frac{P(V)}{P(R/V)P(V)+P(R/P)P(P)} =$$

$$= 0{,}7\times\frac{0{,}6}{0{,}7\times 0{,}6+1\times 0{,}4} = 0{,}51$$

Variabile casuale

x numero reale associato ad un evento

Funzione di distribuzione $F_x(a) = P(x \leq a)$

1 – Monotona non decrescente

2 - $F_x(-\infty) = 0$ $F_x(\infty) = 1$

Densità di probabilità $p_x(a) = \dfrac{P(a \leq x \leq a + da)}{da} = \dfrac{d}{da} F_x(a)$

1 – $p_x(a) \geq 0$

2 - $\int_{-\infty}^{+\infty} p_x(a)\,da = 1$

Variabile casuale discreta

• Le variabili casuali sono discrete quando possono assumere un insieme discreto di valori (e quindi i possibili risultati sono in numero finito o comunque numerabile).

• Esempio: v.c. Legata al numero sulla faccia superiore del dado.

Funzione di distribuzione

$$F_x(a) = P(x \le a) = \frac{1}{6}u(a-1) + \frac{1}{6}u(a-2) + \ldots + \frac{1}{6}u(a-6)$$

Densità di probabilità

$$p_x(a) = \frac{d}{da}F_x(a) = \frac{1}{6}\delta(a-1) + \frac{1}{6}\delta(a-6) + \ldots + \frac{1}{6}\delta(a-6)$$

Variabile casuale continua

• Le variabili casuali sono continue quando possono assumere un insieme continuo di valori (e quindi i possibili risultati sono in numero infinito).

• Esempio: v.c. Uniforme 0-1 - Posizione di una biglia che si muove a velocità costante su una pista circolare lunga 1 metro. Assume con la stessa probabilità un qualsi valore reale valore compreso tra 0 e 1

Funzione di distribuzione $$F_x(a) = P(x \leq a) = a$$

Densità di probabilità $$p_x(a) = \frac{d}{da} F_x(a) = 1$$

Uso della densità di probabilità

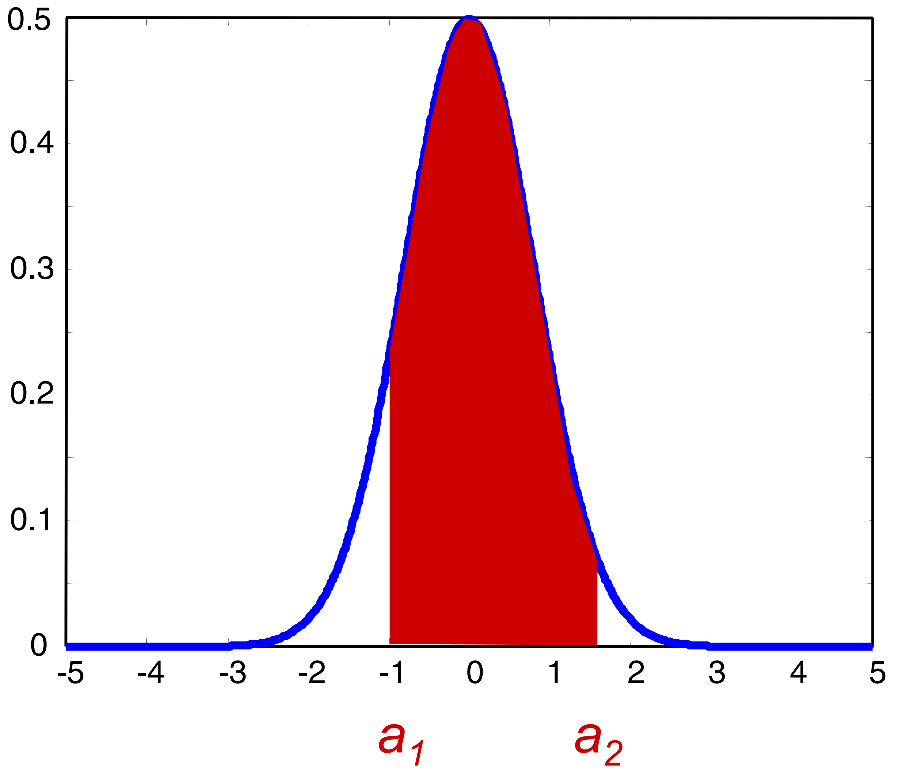
Dalla densità di probabilità $p(a)$ è facile calcolare la probabilità che la variabile casuale x assuma un valore compreso in un intervallo a_1, a_2. Basta sommare! si ottiene l'area sottesa dalla ddp nell'intervallo d'interesse.

$$P(a_1 < x \le a_2) = \int_{a_1}^{a_2} p_x(a)da$$

Si noti che

$$P(-\infty < x < \infty) = \int_{-\infty}^{\infty} p_x(a)da = 1$$

Dunque l'area sottesa dalla ddp di una qualunque variabile casuale è unitaria.



Valore atteso di una funzione di v.c.

Il valore atteso di una funzione *g(x)* di una variabile casuale *x* è definito come segue.

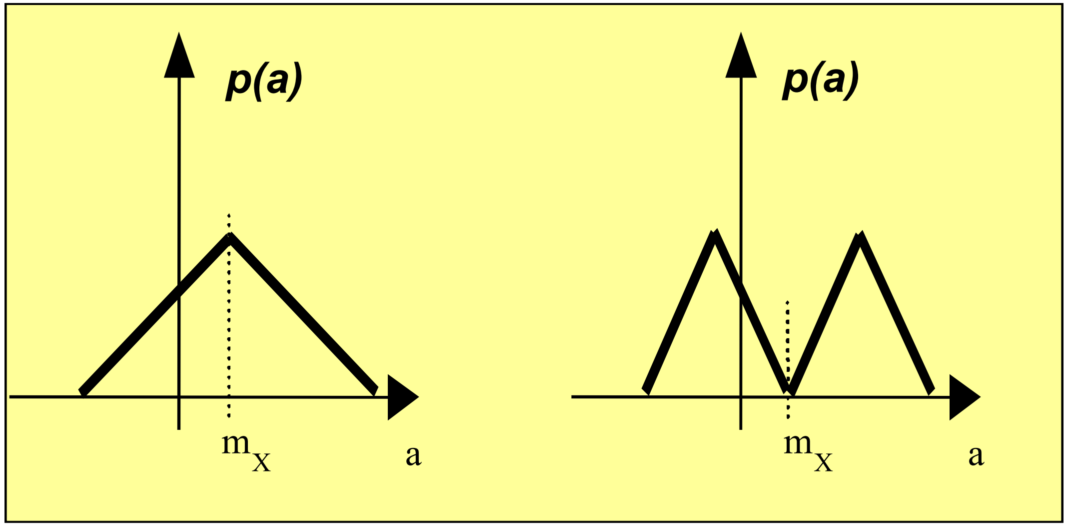
$$E[g(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(a) \cdot p_x(a) \cdot da$$

Valor medio di una variabile casuale

Il valor medio m_x , detto anche valore atteso $E[x]$ o momento (statistico) di ordine uno, di una variabile casuale ***x*** è definito come segue.

$$m_x = E[x] = \int_{-\infty}^{\infty} a \cdot p_x(a) \cdot da$$

Il valor medio di una variabile casuale è l'ascissa del "baricentro" dell'area sottesa dalla densità di probabilità.



Il valor medio della somma di 2 variabili casuali è la somma dei valori medi

Valore quadratico medio e varianza

Il valor quadratico medio $E[x^2]$, detto anche potenza statistica o momento (statistico) di ordine 2, di una variabile casuale ***x*** è :

$$E\left[x^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} a^2 \cdot p_x(a) \cdot da$$

La varianza σ_x^2 (detta anche momento centrale di ordine 2) di una variabile casuale ***x*** è il valore quadratico medio della differenza tra ***x*** e il suo valor medio m_x

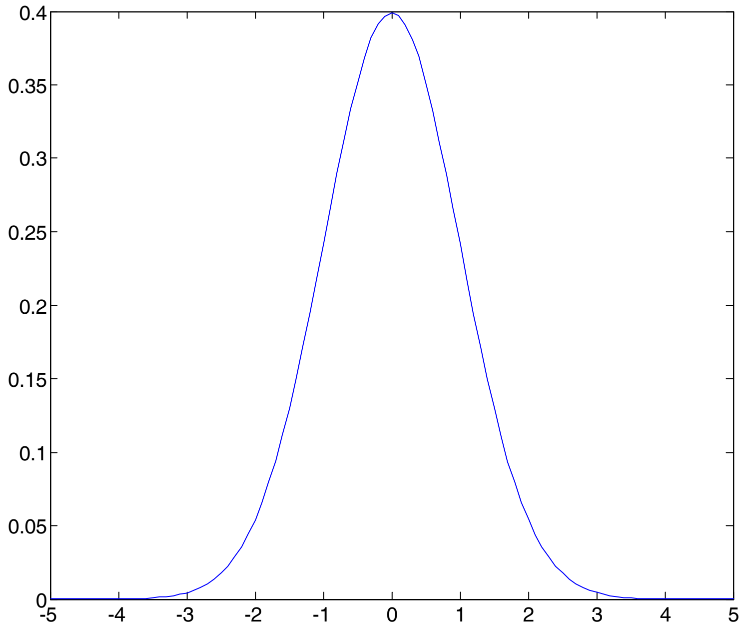
$$\sigma_x^2 = E\left[(x - m_x)^2\right] = E\left[x^2\right] - m_x^{\;2}$$

La radice quadrata della varianza è detta deviazione standard (o scarto quadratico medio) della variabile casuale ***x***

$$\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2}$$

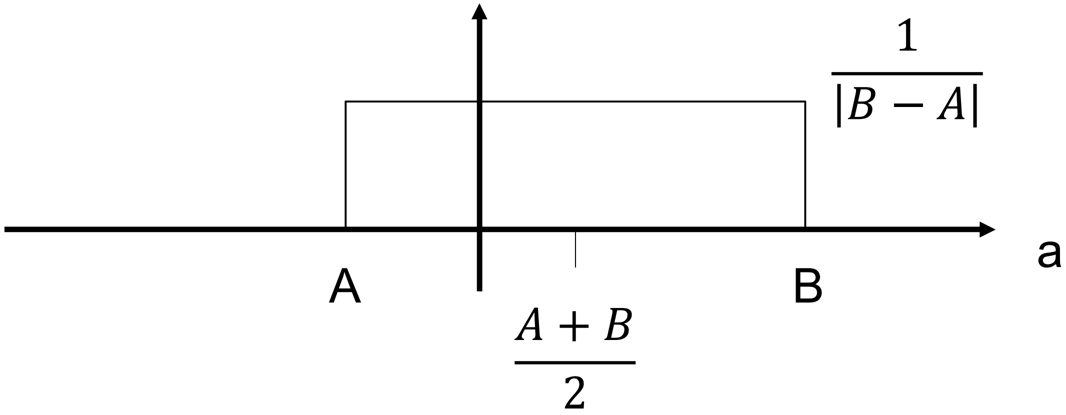
Densità di probabilità Gaussiana

$$p_x(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} \exp\left\{ -\frac{(a - m_x)^2}{2\sigma_x^2} \right\}$$



Densità di probabilità uniforme

$$p_x(a) = \frac{1}{|B-A|} rect\left(\frac{a - {(A+B)}/{2}}{|B-A|}\right)$$

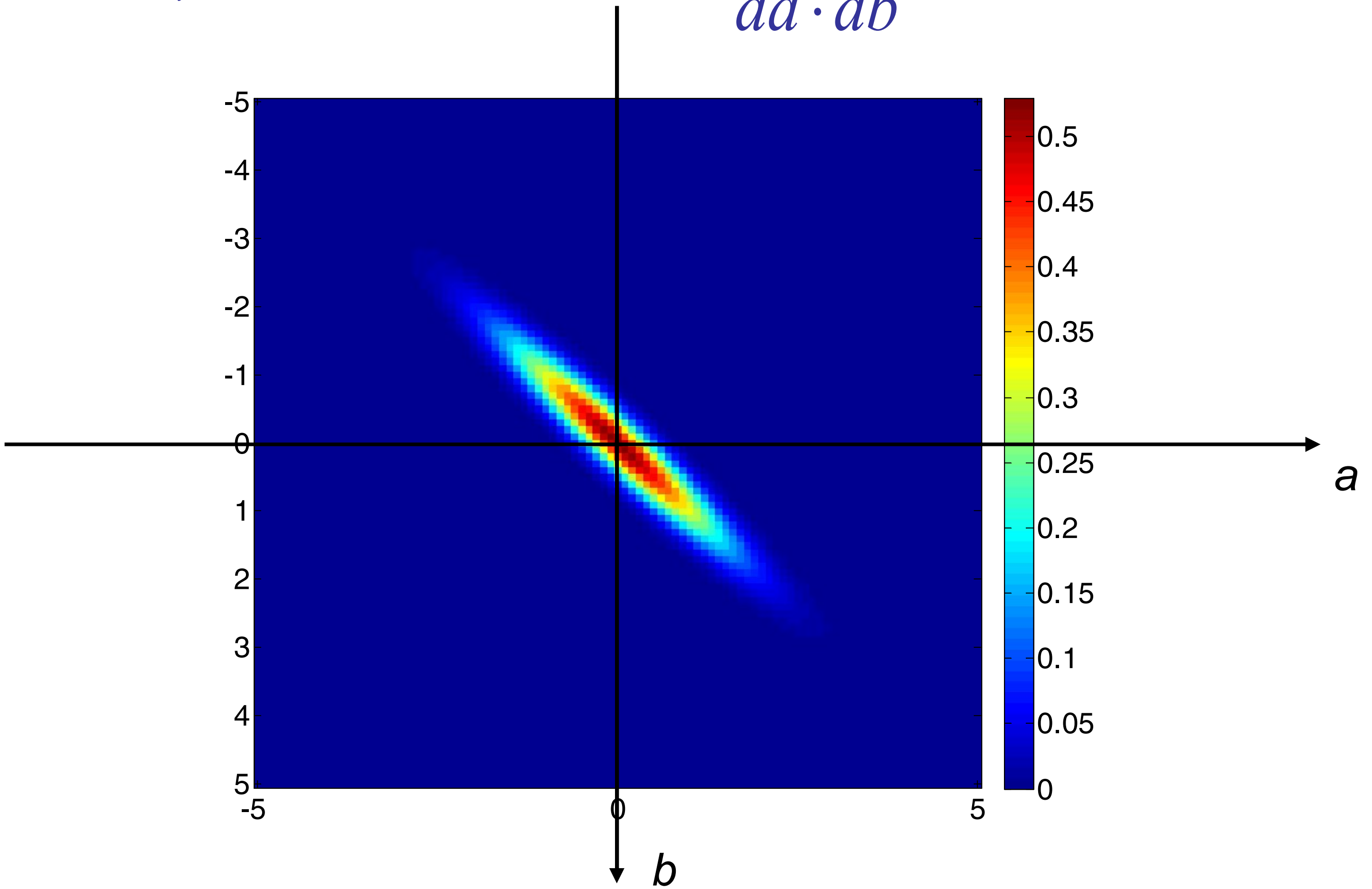


$$m_x = \frac{A+B}{2} \qquad \sigma_x^2 = \frac{\Delta^2}{12} \qquad \Delta = |B-A|$$

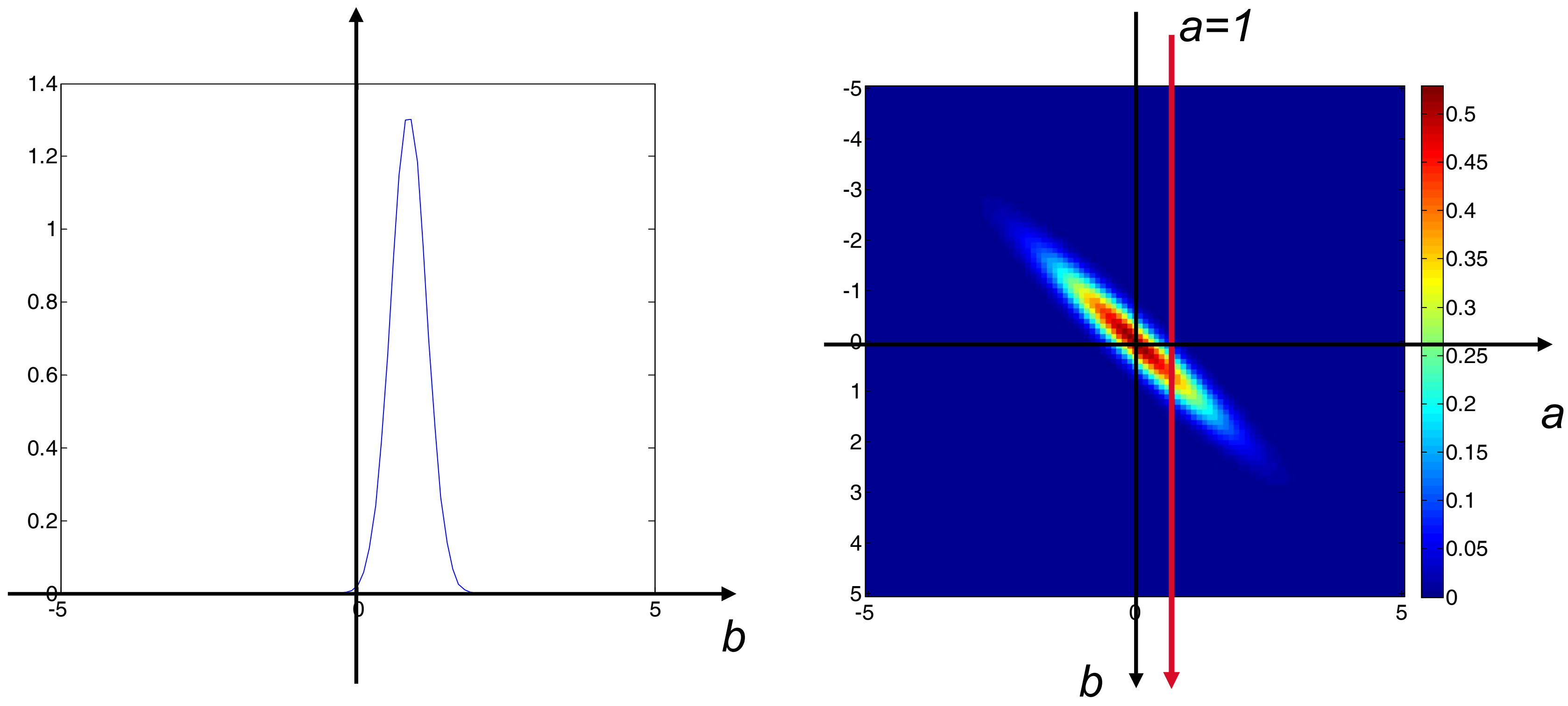
Ddp congiunta di 2 variabili casuali

Densità di probabilità congiunta delle 2 variabili casuali *x* e *y*:

$$p_{xy}(a,b) = \frac{P(a \le x \le a+da, b \le y \le b+db)}{da \cdot db}$$

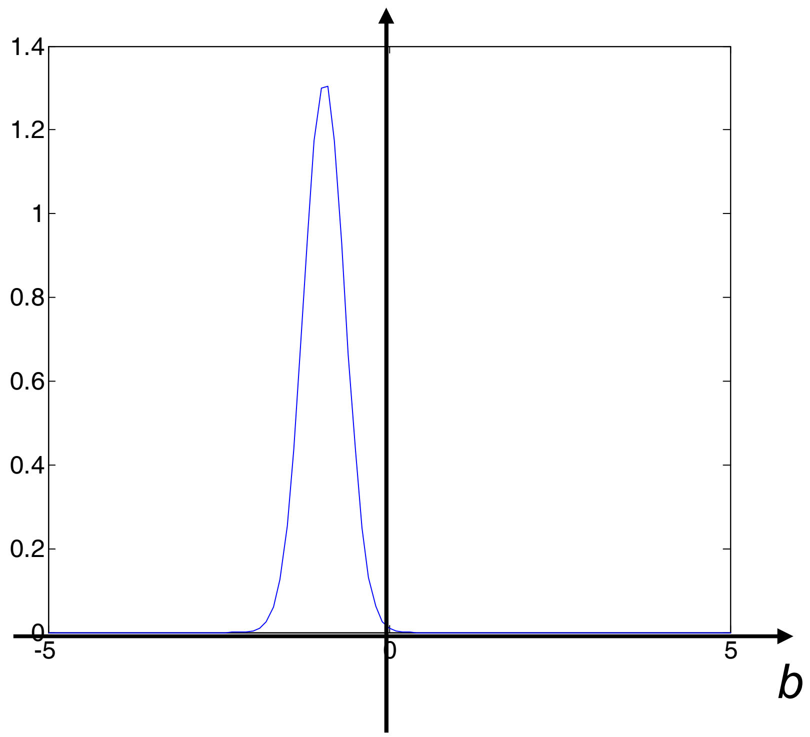


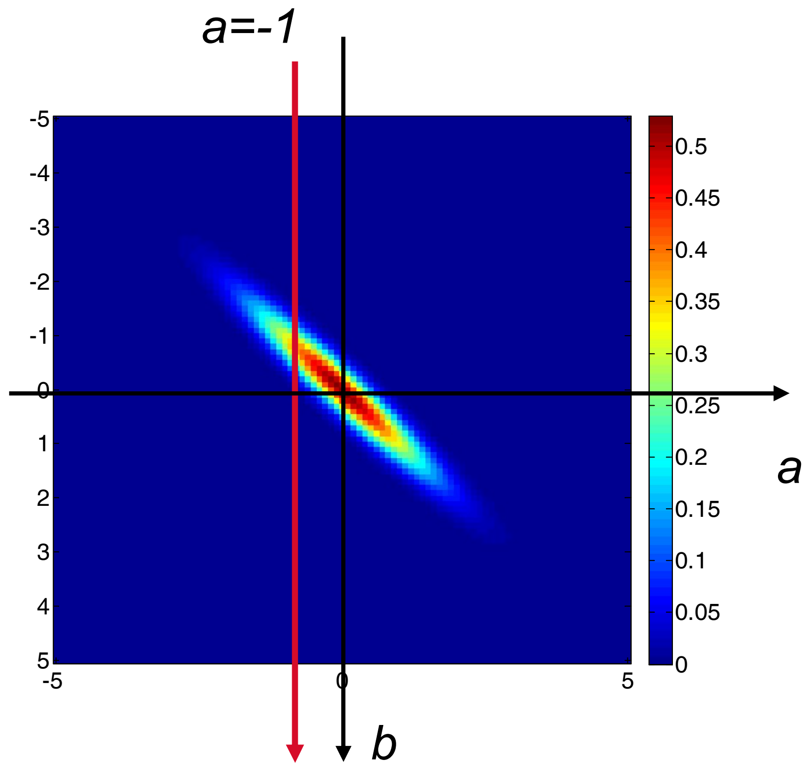
La densità di propabilità congiunta si puo' ottenere come densità di propabilità di una sola v.c. condizionata al valore assunto dall'altra v.c. (es: x=1) moltiplicata per la probabilità che la variabile casuale condizionante abbia assunto quel preciso valore.



$$p_{xy}(1,b) = p_{y/x=1}(b) \cdot p_x(1)$$

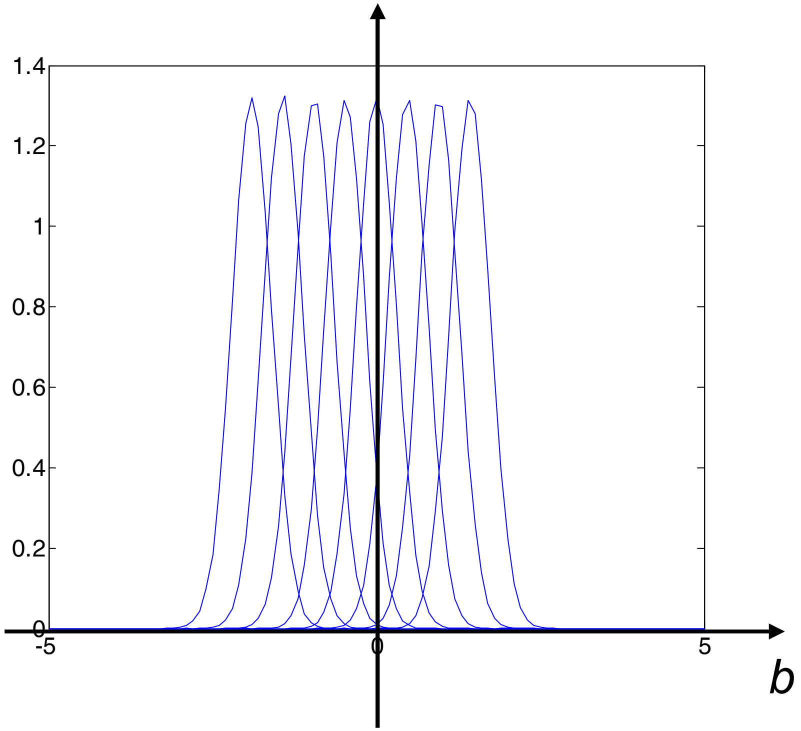
La densità di propabilità congiunta si puo' ottenere come densità di propabilità di una sola v.c. condizionata al valore assunto dall'altra v.c. (es: x=-1) moltiplicata per la probabilità che la variabile casuale condizionante abbia assunto quel preciso valore.

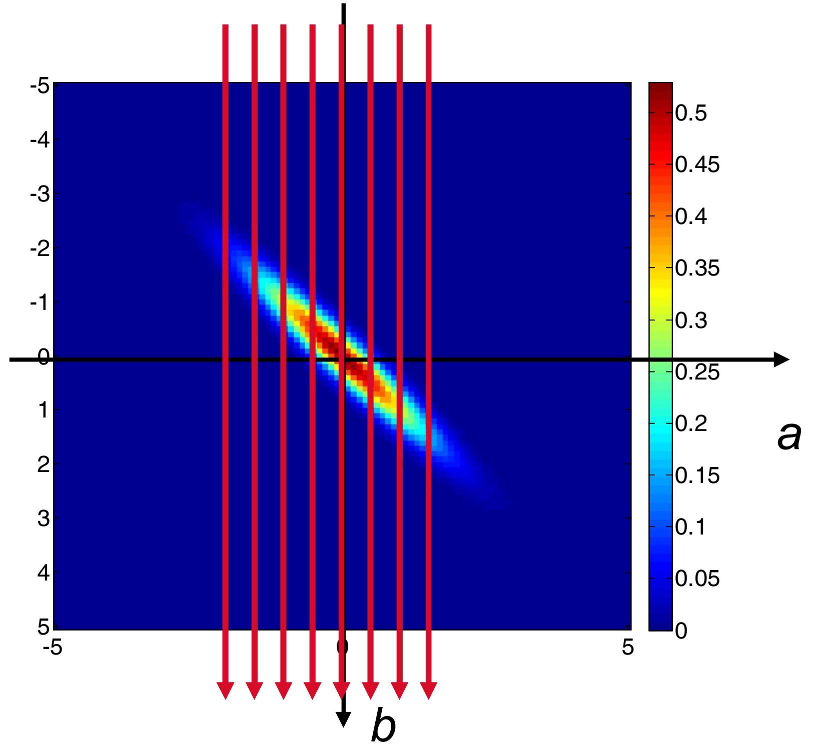




$$p_{xy}(-1,b) = p_{y/x=-1}(b) \cdot p_x(-1)$$

Legame tra ddp congiunta e condizionata





$$\boxed{p_{xy}(a,b) = p_{y/x=a}(b) \cdot p_x(a)}$$

Ddp congiunta di 2 variabili casuali

Densità di probabilità congiunta delle 2 variabili casuali *x* e *y*:

$$p_{xy}(a,b)=\frac{P(a\le x\le a+da, b\le y\le b+db)}{da\cdot db}$$

Densità di probabilità della variabile *x* condizionata al valore assunto dalla variabile y:

$$p_{x/y=b}(a)$$

Legame ddp congiunta e ddp condizionata

$$p_{xy}(a,b)=p_{x/y=b}(a)\cdot p_y(b)$$

Se le 2 v.c. sono tra loro <u>**indipendenti**</u> $p_{x/y=b}(a)=p_x(a)$

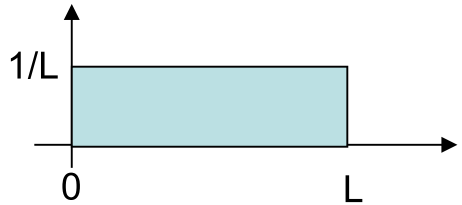
$$p_{xy}(a,b)=p_x(a)\cdot p_y(b)$$

Esempio 1 ddp congiunta e condizionata

Esperimento: 2 biglie che si muovono a velocità costante su 2 piste circolari lunghe L metri.

x posizione della prima biglia

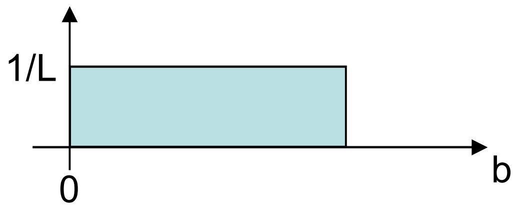
$$p_x(a) = \frac{1}{L}\,\mathrm{rect}\left(\frac{a}{L} - \frac{1}{2}\right)$$



y posizione della seconda biglia

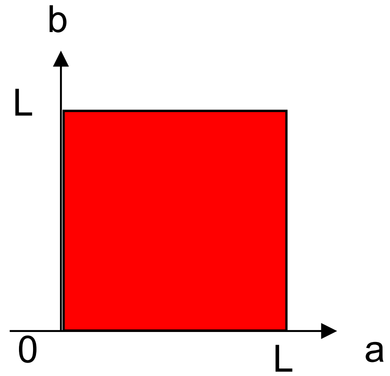
Densità di probabilità della variabile *y* condizionata al valore assunto dalla variabile *x*:

$$p_{y/x=a}(b) = \frac{1}{L}\,\mathrm{rect}\left(\frac{b}{L} - \frac{1}{2}\right)$$



Legame ddp congiunta e ddp condizionata

$$p_{xy}(a,b) = p_{y/x=a}(b)\cdot p_x(a) = p_y(b)\cdot p_x(a) = \frac{1}{L^2}\,\mathrm{rect}\left(\frac{b}{L} - \frac{1}{2}\right)\cdot \mathrm{rect}\left(\frac{a}{L} - \frac{1}{2}\right)$$

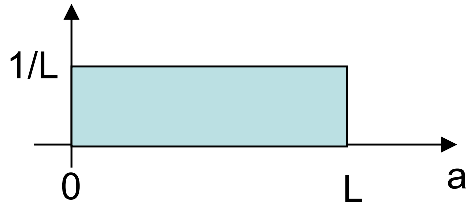


Esempio 2 ddp congiunta e condizionata

Esperimento: 2 biglie che si muovono a velocità costante su 2 piste circolari lunghe L metri.

x posizione della prima biglia

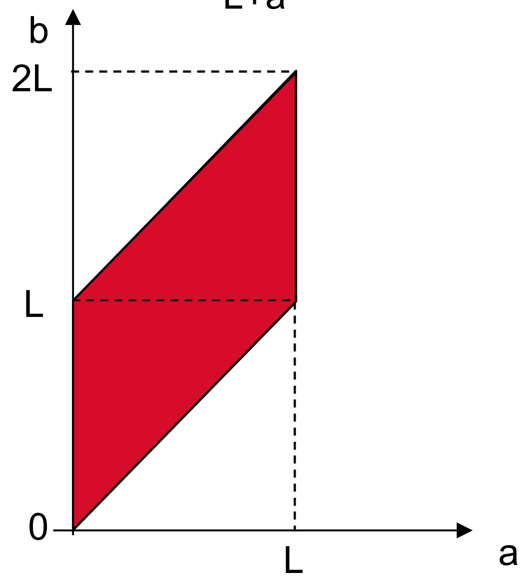
$$p_x(a) = \frac{1}{L}\,\mathrm{rect}\left(\frac{a}{L} - \frac{1}{2}\right)$$



y somma delle posizioni delle 2 biglie

Densità di probabilità della variabile *y* condizionata al valore assunto dalla variabile *x*:

$$p_{y/x=a}(b) = \frac{1}{L}\,\mathrm{rect}\left(\frac{b}{L} - \frac{1}{2} - \frac{a}{L}\right)$$



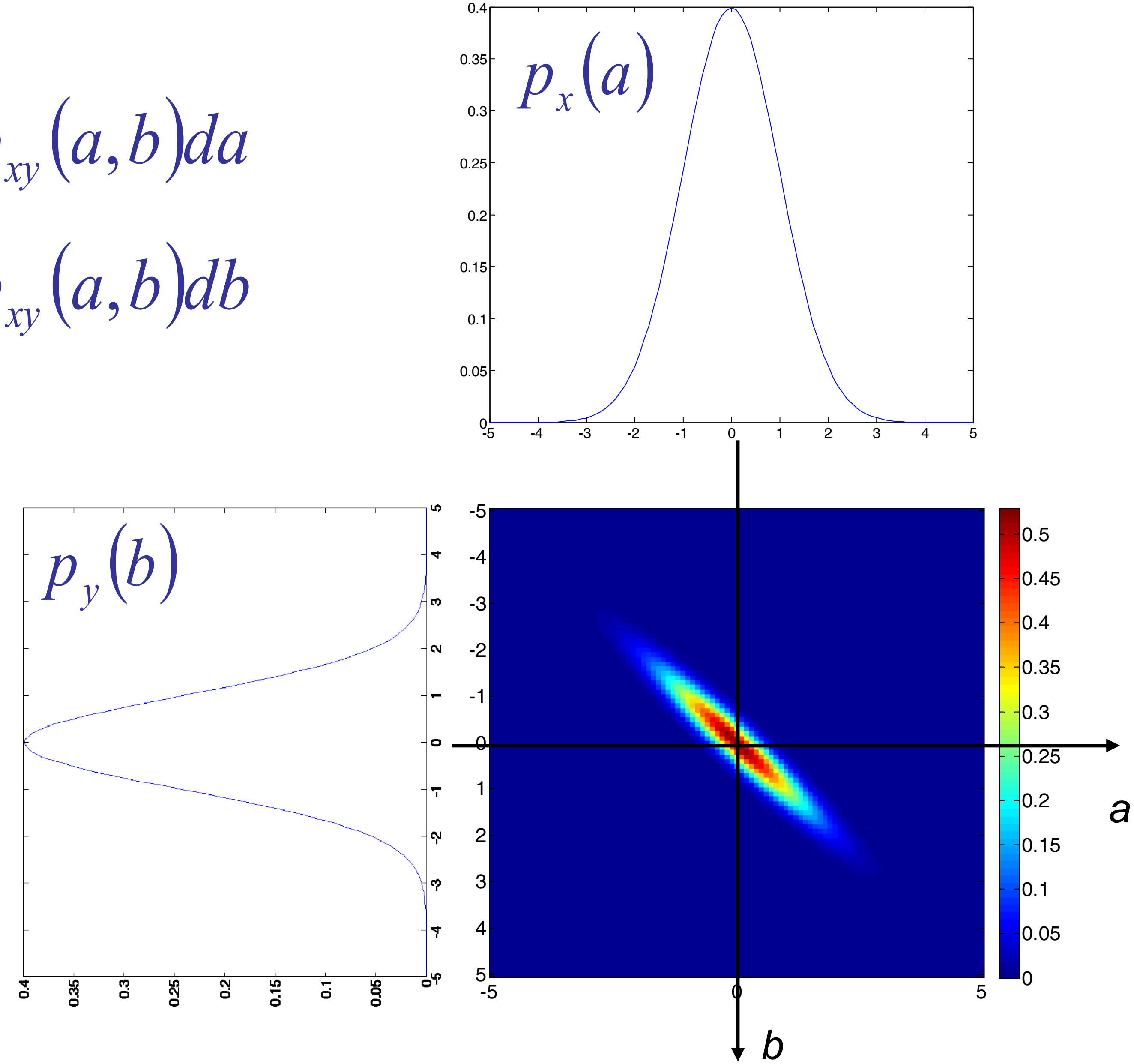
Legame ddp congiunta e ddp condizionata

$$p_{xy}(a,b) = p_{y/x=a}(b)\cdot p_x(a) = \frac{1}{L^2}\,\mathrm{rect}\left(\frac{b}{L} - \frac{1}{2} - \frac{a}{L}\right)\cdot \mathrm{rect}\left(\frac{a}{L} - \frac{1}{2}\right)$$

Densità di probabilità marginali

$$p_y(b) = \int p_{xy}(a,b)\,da$$

$$p_x(a) = \int p_{xy}(a,b)\,db$$



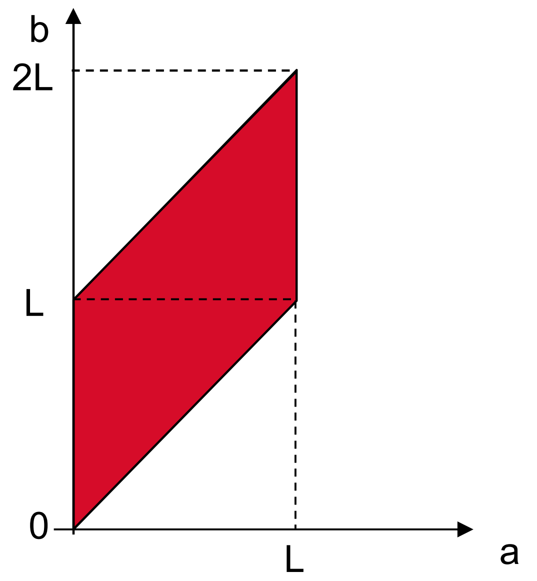
Esempio ddp marginale

Esperimento: 2 biglie che si muovono a velocità costante su 2 piste circolari lunghe L metri.

x posizione della prima biglia

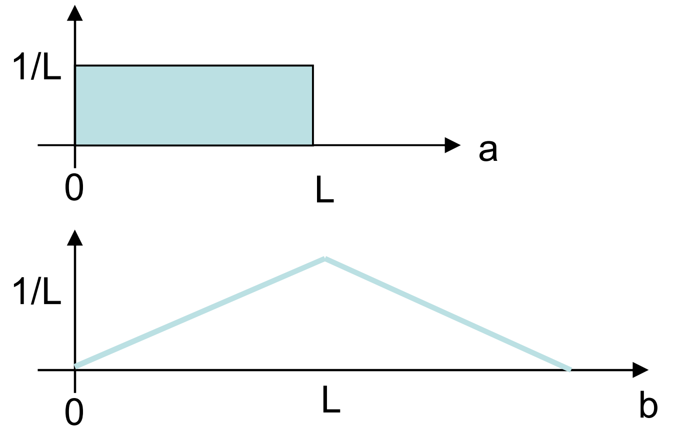
y somma delle posizioni delle 2 biglie

$$p_{xy}(a,b) = p_{y/x=a}(b)\cdot p_x(a) = \frac{1}{L^2}\mathrm{rect}\left(\frac{b}{L}-\frac{1}{2}-\frac{a}{L}\right)\cdot \mathrm{rect}\left(\frac{a}{L}-\frac{1}{2}\right)$$



$$p_x(a) = \int p_{xy}(a,b)\,db = \frac{1}{L}\mathrm{rect}\left(\frac{a}{L}-\frac{1}{2}\right)$$

$$p_y(b) = \int p_{xy}(a,b)\,da = \frac{1}{L}\mathrm{tri}\left(\frac{b}{L}-1\right)$$



Ddp della somma di 2 v.c. $z = x + y$

$$p_{xz}(a,b) = p_{z/x=a}(b)\,p_x(a)$$

$$p_{z/x=a}(b) = p_y(b-a)$$

Se *x* e *y* indipendenti $\Rightarrow$ $p_{xz}(a,b) = p_y(b-a)\,p_x(a)$

$$p_z(b) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{xz}(a,b)\,da = \int_{-\infty}^{\infty} p_y(b-a)\,p_x(a)\,da =$$

$$= p_y(b) * p_x(b)$$