Frequenza relativa e probabilità

La **probabilità** e' un numero che indica con quale frequenza si presentano **eventi** associati ad un insieme di possibili **risultati** di un "***esperimento***".

Esempio:

- **Esperimento**: Lancio "casuale" di un dado
- **Risultato**: Numero sulla faccia superiore del dado
- **Insieme dei possibili risultati** (elementari): $S=\{1,2,3,4,5,6\}$
- **Evento**: qualsiasi sottoinsieme dell'insieme dei risultati $A=\{1,2\}$; $B=\{2,4,6\}$; ecc.

Se si esegue un numero N di prove sufficientemente elevato, sia l'esperienza sia la teoria della probabilità mostrano che la frequenza relativa dei singoli risultati ($k=1,2,3,4,5,6$) (o di un qualsiasi evento) è prossima alla loro probabilità:

$$f_A = \frac{N_A}{N} \approx P(A)$$

Probabilità: proprietà e regole di calcolo

La probabilità è un numero compreso tra 0 (evento impossibile) e 1 (evento certo)

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

L'insieme S di tutti i possibili risultati è l'evento certo

$$P(S) = 1$$

La probabilità dell'unione (**or**) di 2 eventi è uguale alla somma delle probabilità meno la probabilità della loro intersezione

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

La probabilità dell'intersezione (**and**) di 2 eventi è uguale alla probabilità di un evento condizionato alla realizzazione del secondo, moltiplicata per la probabilità dell'evento

$$P(AB) = P(A/B) \cdot P(B)$$

Esempio del calcolo di probabilità dell'unione

Calcolare la probabilità dell'unione dei seguenti eventi:
A = uscita dei numeri {1,2,3} sulla roulette
B = uscita di un numero pari sulla roulette

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{3}{37} + \frac{18}{37} - P(AB)$$

$$P(AB) = P(A/B) \cdot P(B) = \frac{1}{18} \cdot \frac{18}{37} = \frac{1}{37}$$

$$P(AB) = P(B/A) \cdot P(A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{37} = \frac{1}{37}$$

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{3}{37} + \frac{18}{37} - \frac{1}{37} = \frac{20}{37}$$

Teorema di Bayes

$$\boxed{P(AB) = P(A/B) \cdot P(B)}$$

$$\boxed{P(AB) = P(B/A) \cdot P(A)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{P(A/B) = P(B/A) \cdot \frac{P(A)}{P(B)}}$$

Esempio 1 teorema di Bayes

60% biglietti vincenti (V) 40% biglietti perdenti (P)
70% dei biglietti vincenti e tutti quelli perdenti sono rossi (R)
Calcolare la probabilità che scelto un biglietto rosso sia vincente

$$P(V/R) = P(R/V) \cdot \frac{P(V)}{P(R)} =$$

$$= P(R/V) \cdot \frac{P(V)}{P(R/V)P(V) + P(R/P)P(P)} =$$

$$= 0{,}7 \times \frac{0{,}6}{0{,}7 \times 0{,}6 + 1 \times 0{,}4} = 0{,}51$$

Esempio 2 teorema di Bayes

Su 3 buste (1,2,3), una sola è vincente (V).
Il giocatore (G) sceglie una busta e il conduttore (C) ne apre un'altra senza premio.
Se il giocatore sceglie la busta 1 e il conduttore apre la busta 3 (GC13), calcolare la probabilità che il premio sia nella busta 1 (V1) o nella busta 2 (V2).

$$P\left(V1/\left(C3/G1\right)\right)=P\left(\left(C3/G1\right)/V1\right)\cdot\frac{P\left(V1\right)}{P(C3/G1)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1/3}{1/2}=\frac{1}{3}$$

$$P\left(V2/\left(C3/G1\right)\right)=P\left(\left(C3/G1\right)/V2\right)\cdot\frac{P\left(V2\right)}{P(C3/G1)}=1\cdot\frac{1/3}{1/2}=\frac{2}{3}$$

Esempio 3 teorema di Bayes

Su 3 buste (1,2,3), una sola è vincente (V).
Il conduttore (C) ne apre una senza premio (C3).
Calcolare la probabilità che il premio sia nella busta 1 (V1) o nella busta 2 (V2).

$$P(V1/C3) = P(C3/V1)\cdot\frac{P(V1)}{P(C3)} = {}^{1}\!/_{2}\cdot\frac{1/3}{1/3} = \frac{1}{2}$$

$$P(V2/C3) = P(C3/V2)\cdot\frac{P(V2)}{P(C3)} = {}^{1}\!/_{2}\cdot\frac{1/3}{1/3} = \frac{1}{2}$$

Variabile casuale

x numero reale associato ad un evento

Funzione di distribuzione $$F_x(a) = P(x \le a)$$

1 – Monotona non decrescente

2 - $F_x(-\infty) = 0 \qquad F_x(\infty) = 1$

Densità di probabilità $$p_x(a) = \frac{P(a \le x \le a + da)}{da} = \frac{d}{da} F_x(a)$$

1 – $p_x(a) \ge 0$

2 - $\int_{-\infty}^{+\infty} p_x(a)\,da = 1$

Variabile casuale discreta

• Le variabili casuali sono discrete quando possono assumere un insieme discreto di valori (e quindi i possibili risultati sono in numero finito o comunque numerabile).

• Esempio: v.c. Legata al numero sulla faccia superiore del dado.

Funzione di distribuzione

$$F_x(a) = P(x \le a) = \frac{1}{6}u(a-1) + \frac{1}{6}u(a-2) + \ldots + \frac{1}{6}u(a-6)$$

Densità di probabilità

$$p_x(a) = \frac{d}{da}F_x(a) = \frac{1}{6}\delta(a-1) + \frac{1}{6}\delta(a-6) + \ldots + \frac{1}{6}\delta(a-6)$$

Variabile casuale continua

• Le variabili casuali sono continue quando possono assumere un insieme continuo di valori (e quindi i possibili risultati sono in numero infinito).

• Esempio: v.c. Uniforme 0-1 - Posizione di una biglia che si muove a velocità costante su una pista circolare lunga 1 metro. Assume con la stessa probabilità un qualsi valore reale valore compreso tra 0 e 1

Funzione di distribuzione $F_x(a) = P(x \leq a) = a$

Densità di probabilità $p_x(a) = \frac{d}{da} F_x(a) = 1$

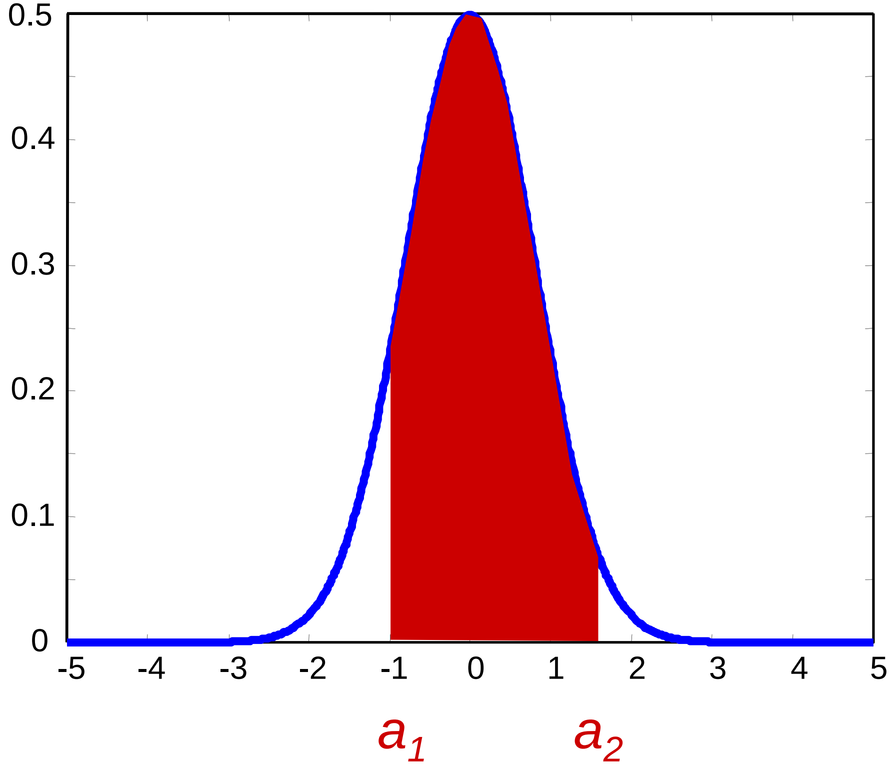
Uso della densità di probabilità

Dalla densità di probabilità *p(a)* è facile calcolare la probabilità che la variabile casuale *x* assuma un valore compreso in un intervallo a_1, a_2. Basta sommare! si ottiene l'area sottesa dalla ddp nell'intervallo d'interesse.

$$P(a_1 < x \leq a_2) = \int_{a_1}^{a_2} p_x(a)da$$

Si noti che

$$P(-\infty < x < \infty) = \int_{-\infty}^{\infty} p_x(a)da = 1$$



Dunque l'area sottesa dalla ddp di una qualunque variabile casuale è unitaria.

Valore atteso di una funzione di v.c.

Il valore atteso di una funzione *g(x)* di una variabile casuale *x* è definito come segue.

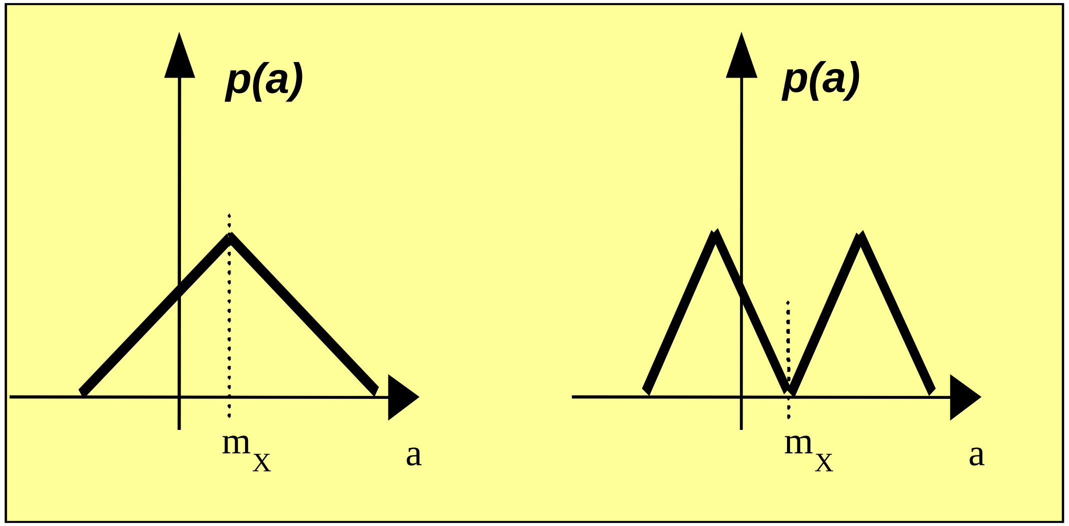
$$E\left[g(x)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} g(a) \cdot p_x(a) \cdot da$$

Valor medio di una variabile casuale

Il valor medio m_x , detto anche valore atteso $E\,[x]$ o momento (statistico) di ordine uno, di una variabile casuale ***x*** è definito come segue.

$$m_x = E[x] = \int_{-\infty}^{\infty} a \cdot p_x(a) \cdot da$$

Il valor medio di una variabile casuale è l'ascissa del "baricentro" dell'area sottesa dalla densità di probabilità.



Il valor medio della somma di 2 variabili casuali è la somma dei valori medi

Valore quadratico medio e varianza

Il valor quadratico medio $E[x^2]$, detto anche potenza statistica o momento (statistico) di ordine 2, di una variabile casuale ***x*** è :

$$E\left[x^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} a^2 \cdot p_x(a) \cdot da$$

La varianza $\boldsymbol{\sigma_x^2}$ (detta anche momento centrale di ordine 2) di una variabile casuale ***x*** è il valore quadratico medio della differenza tra ***x*** e il suo valor medio m_x

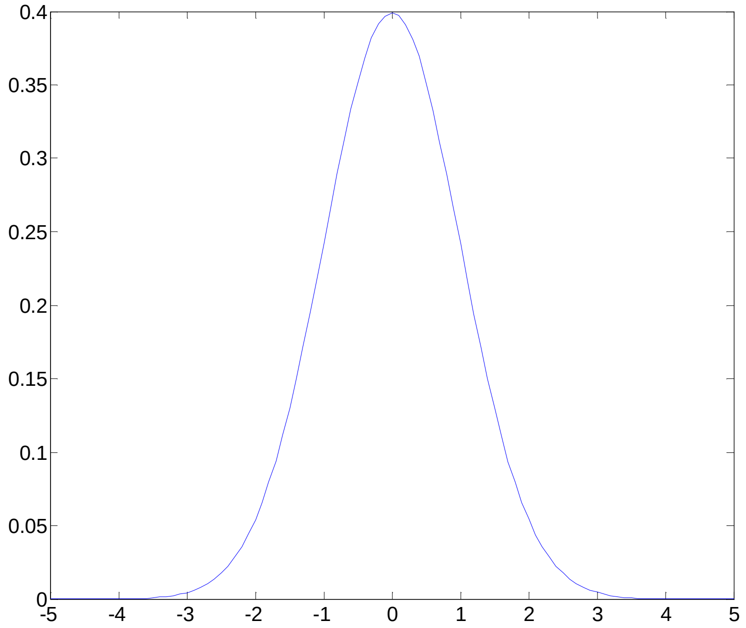
$$\sigma_x^2 = E\left[(x - m_x)^2\right] = E\left[x^2\right] - m_x^{\ 2}$$

La radice quadrata della varianza è detta deviazione standard (o scarto quadratico medio) della variabile casuale ***x***

$$\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2}$$

Densità di probabilità Gaussiana

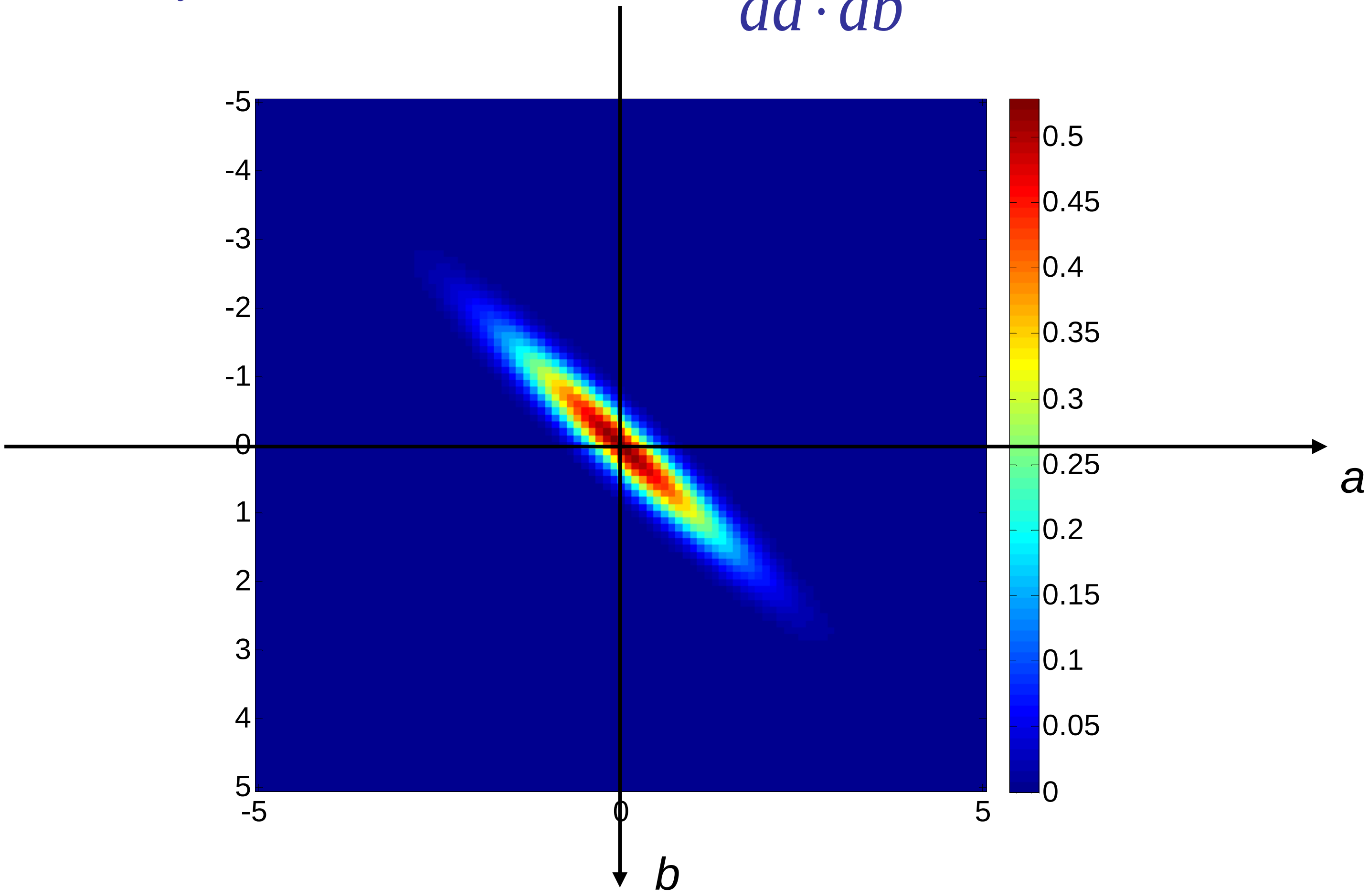
$$p_x(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} \exp\left\{ -\frac{(a - m_x)^2}{2\sigma_x^2} \right\}$$



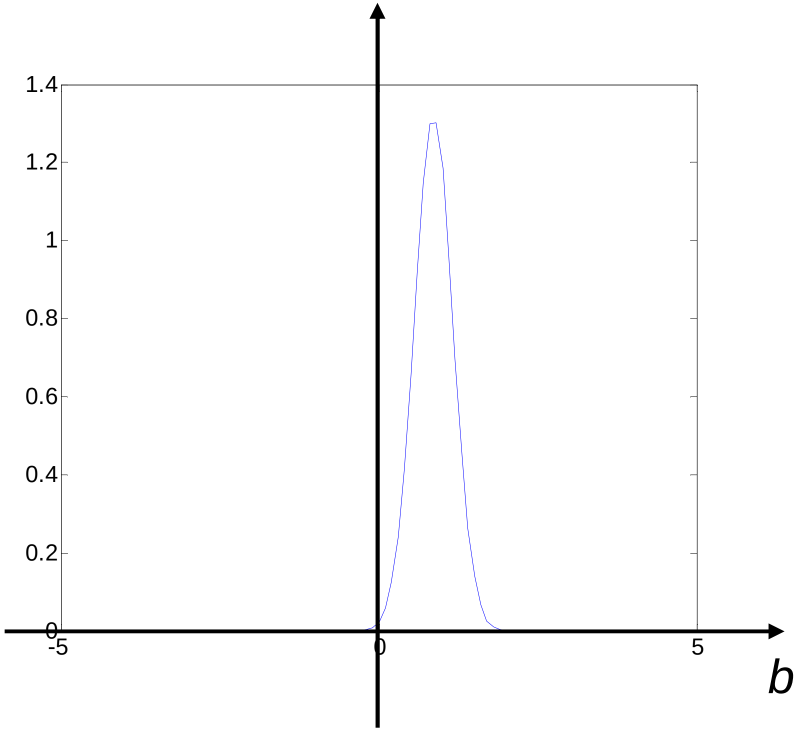
Ddp congiunta di 2 variabili casuali

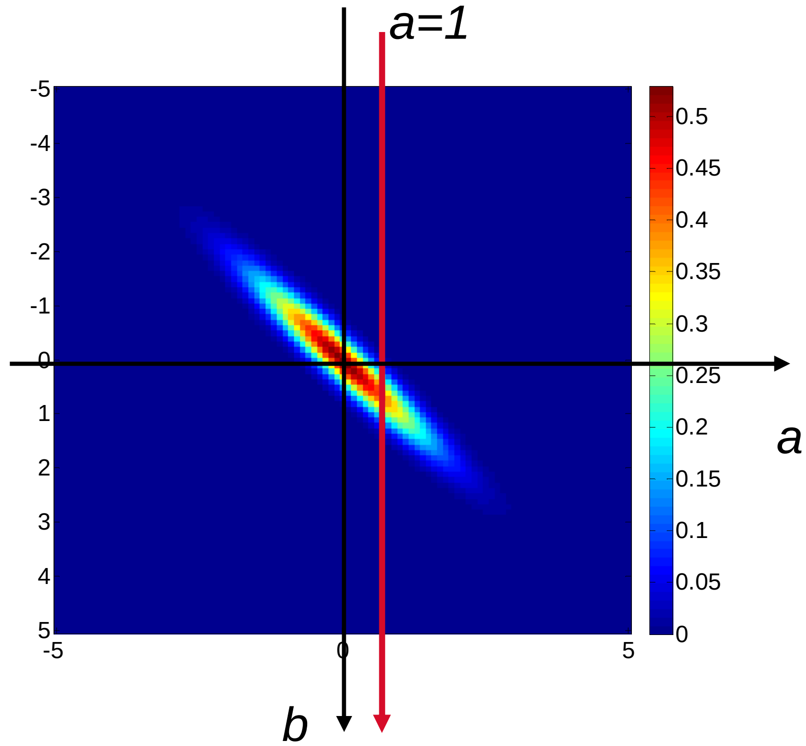
Densità di probabilità congiunta delle 2 variabili casuali *x* e *y*:

$$p_{xy}(a,b) = \frac{P(a \le x \le a+da, b \le y \le b+db)}{da \cdot db}$$



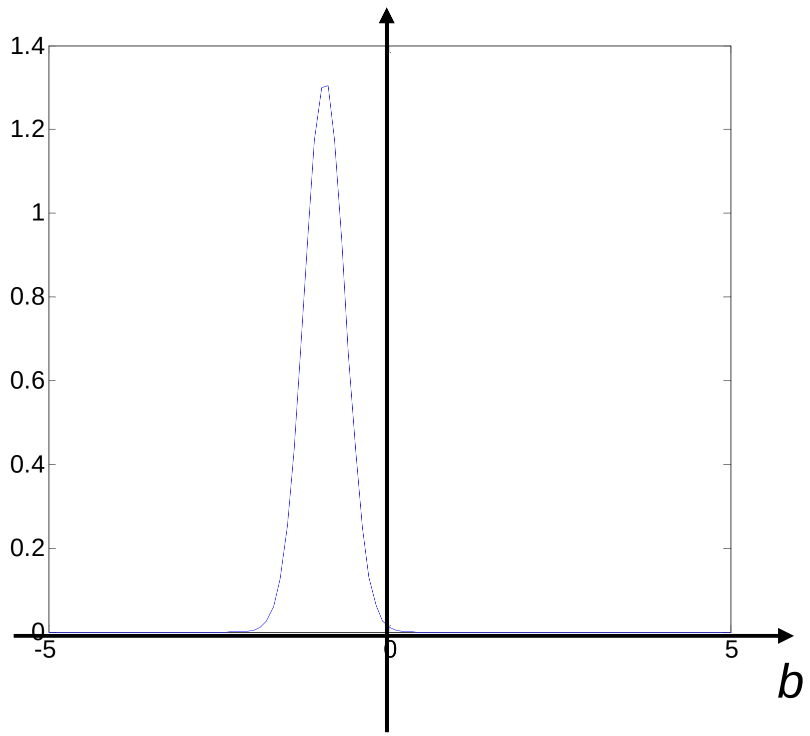
La densità di propabilità congiunta si puo' ottenere come densità di propabilità di una sola v.c. condizionata al valore assunto dall'altra v.c. (es: x=1) moltiplicata per la probabilità che la variabile casuale condizionante abbia assunto quel preciso valore.

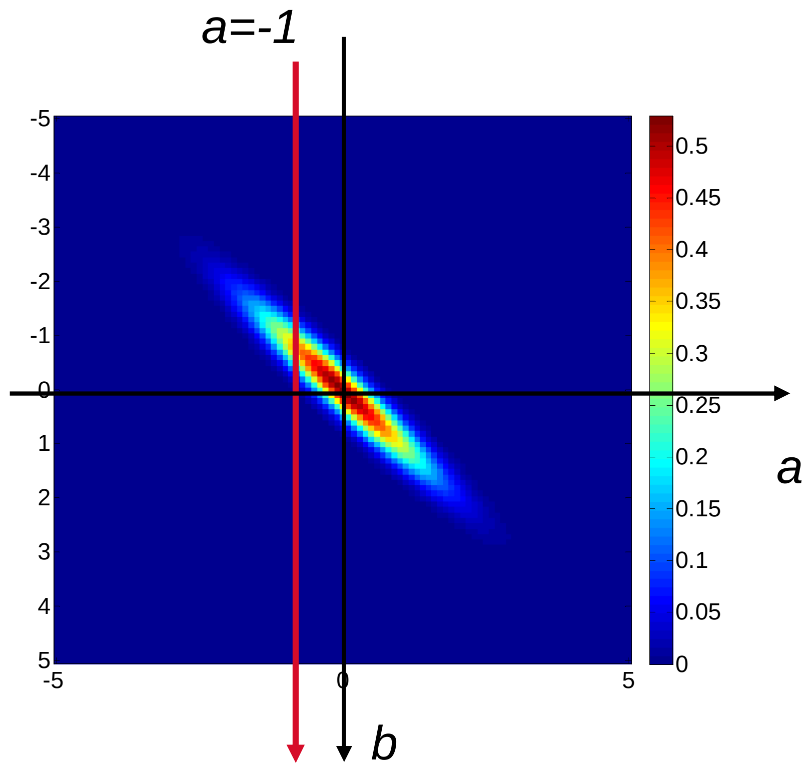




$$p_{xy}(1,b) = p_{y/x=1}(b) \cdot p_x(1)$$

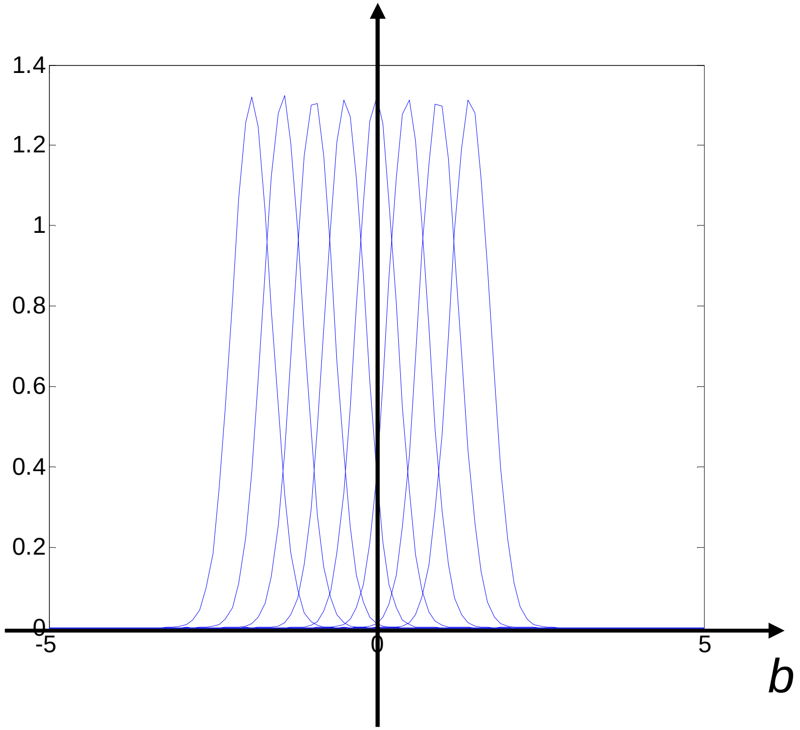
La densità di propabilità congiunta si puo' ottenere come densità di propabilità di una sola v.c. condizionata al valore assunto dall'altra v.c. (es: x=-1) moltiplicata per la probabilità che la variabile casuale condizionante abbia assunto quel preciso valore.

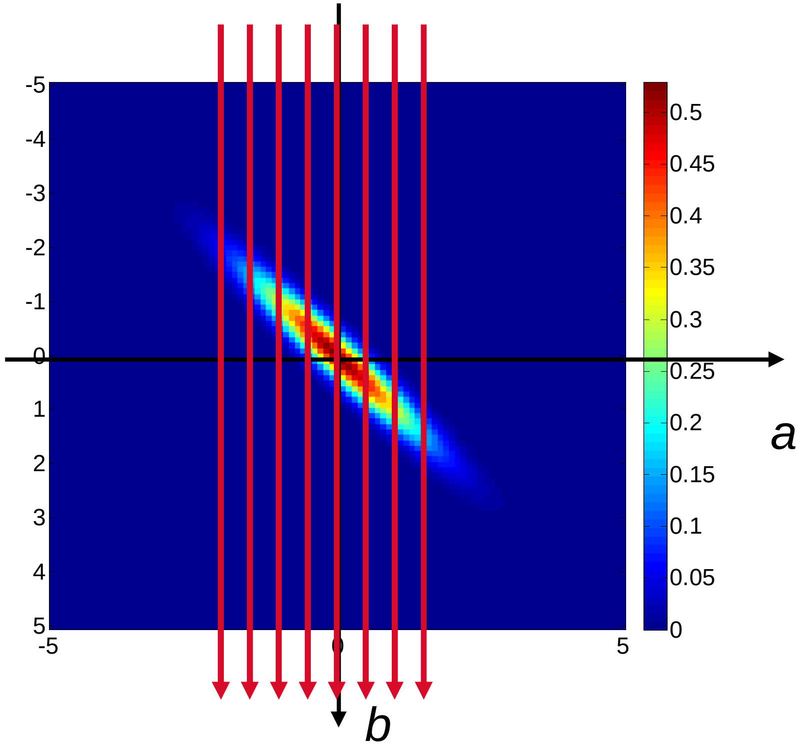




$$p_{xy}(-1,b)=p_{y/x=-1}(b)\cdot p_x(-1)$$

Legame tra ddp congiunta e condizionata





$$\boxed{p_{xy}(a,b) = p_{y/x=a}(b) \cdot p_x(a)}$$

Ddp congiunta di 2 variabili casuali

Densità di probabilità congiunta delle 2 variabili casuali *x* e *y*:

$$p_{xy}(a,b)=\frac{P(a\le x\le a+da, b\le y\le b+db)}{da\cdot db}$$

Densità di probabilità della variabile *x* condizionata al valore assunto dalla variabile y:

$$p_{x/y=b}(a)$$

Legame ddp congiunta e ddp condizionata

$$p_{xy}(a,b)=p_{x/y=b}(a)\cdot p_y(b)$$

Se le 2 v.c. sono tra loro **indipendenti** $p_{x/y=b}(a)=p_x(a)$

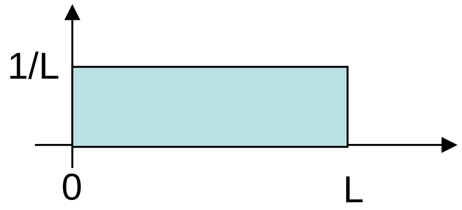
$$p_{xy}(a,b)=p_x(a)\cdot p_y(b)$$

Esempio 1 ddp congiunta e condizionata

Esperimento: 2 biglie che si muovono a velocità costante su 2 piste circolari lunghe L metri.

x posizione della prima biglia

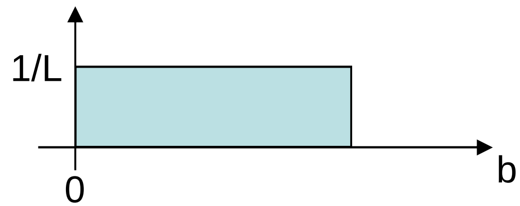
$$p_x(a) = \frac{1}{L}\,\mathrm{rect}\left(\frac{a}{L} - \frac{1}{2}\right)$$



y posizione della seconda biglia

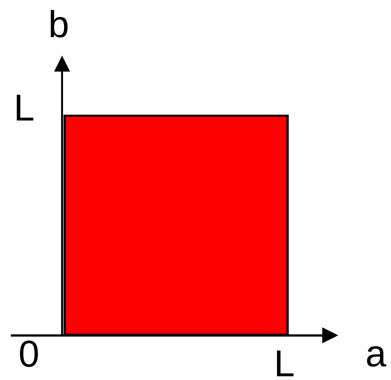
Densità di probabilità della variabile *y* condizionata al valore assunto dalla variabile *x*:

$$p_{y/x=a}(b) = \frac{1}{L}\,\mathrm{rect}\left(\frac{b}{L} - \frac{1}{2}\right)$$



Legame ddp congiunta e ddp condizionata

$$p_{xy}(a,b) = p_{y/x=a}(b)\cdot p_x(a) = p_y(b)\cdot p_x(a) = \frac{1}{L^2}\,\mathrm{rect}\left(\frac{b}{L} - \frac{1}{2}\right)\cdot \mathrm{rect}\left(\frac{a}{L} - \frac{1}{2}\right)$$

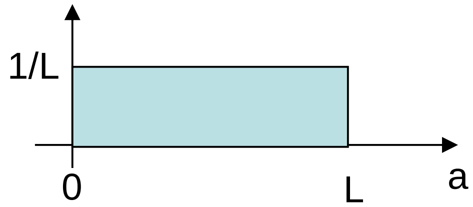


Esempio 2 ddp congiunta e condizionata

Esperimento: 2 biglie che si muovono a velocità costante su 2 piste circolari lunghe L metri.

x posizione della prima biglia

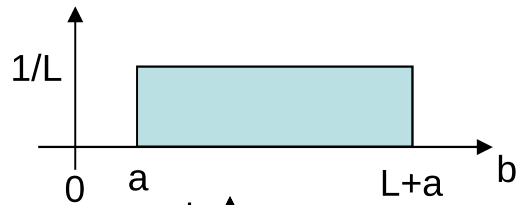
$$p_x(a)=\frac{1}{L}\,\mathrm{rect}\left(\frac{a}{L}-\frac{1}{2}\right)$$



y somma delle posizioni delle 2 biglie

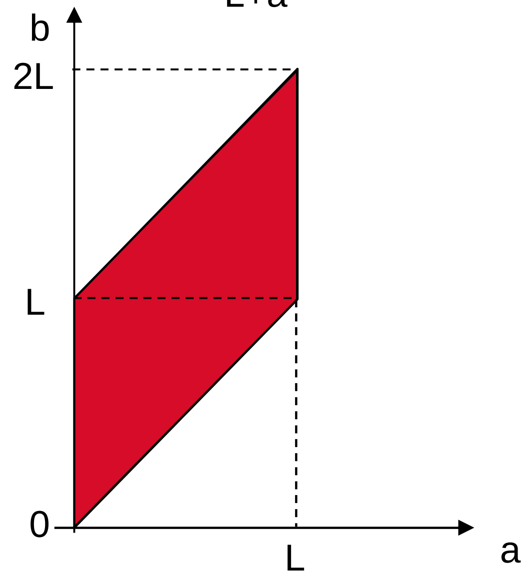
Densità di probabilità della variabile *y* condizionata al valore assunto dalla variabile *x*:

$$p_{y/x=a}(b)=\frac{1}{L}\,\mathrm{rect}\left(\frac{b}{L}-\frac{1}{2}-\frac{a}{L}\right)$$



Legame ddp congiunta e ddp condizionata

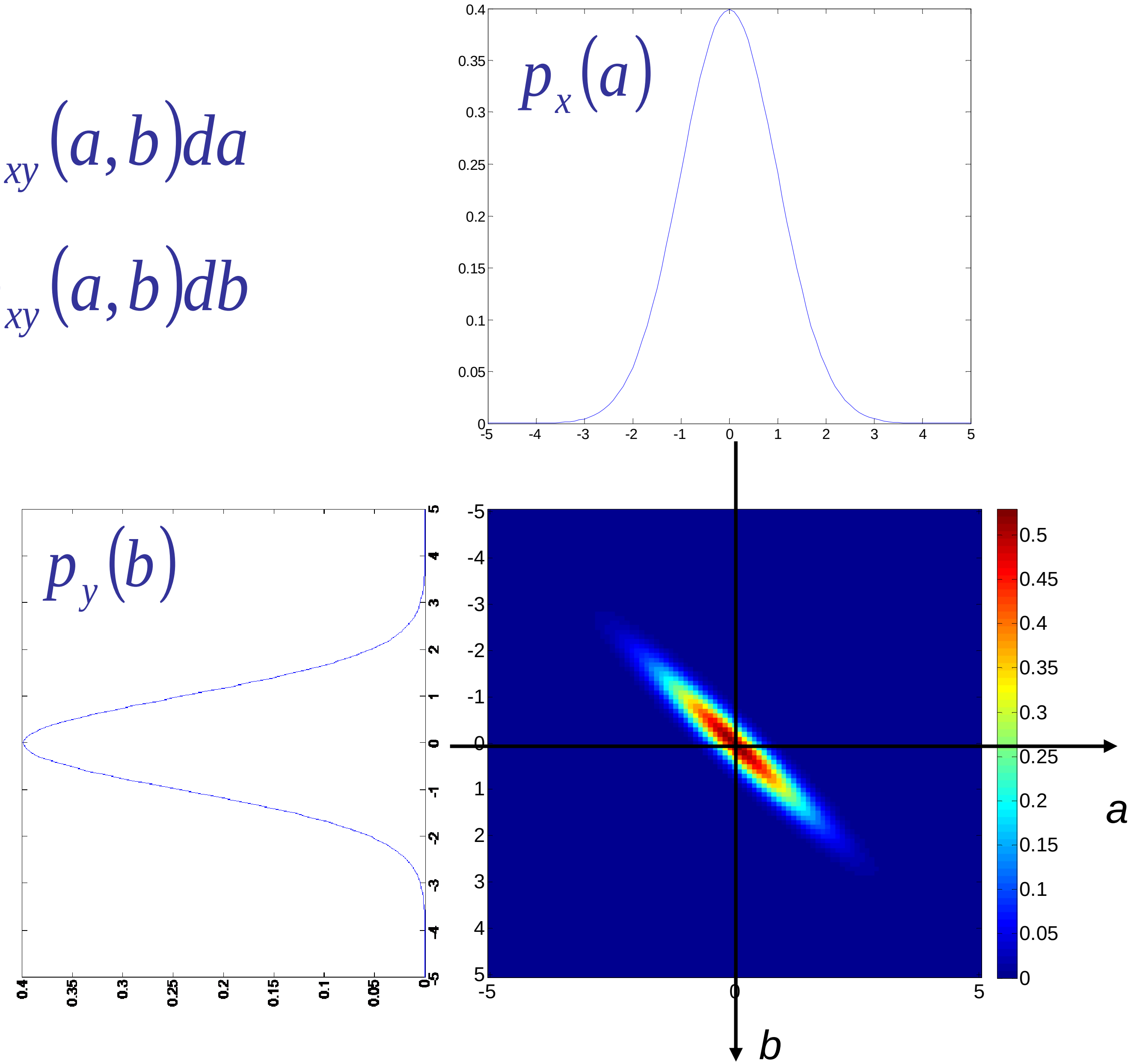
$$p_{xy}(a,b)=p_{y/x=a}(b)\cdot p_x(a)=\frac{1}{L^2}\,\mathrm{rect}\left(\frac{b}{L}-\frac{1}{2}-\frac{a}{L}\right)\cdot\mathrm{rect}\left(\frac{a}{L}-\frac{1}{2}\right)$$



Densità di probabilità marginali

$$p_y(b) = \int p_{xy}(a,b)\,da$$

$$p_x(a) = \int p_{xy}(a,b)\,db$$



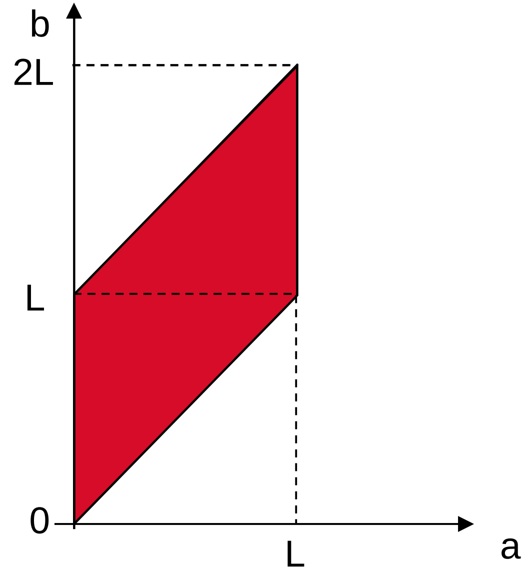
Esempio ddp marginale

Esperimento: 2 biglie che si muovono a velocità costante su 2 piste circolari lunghe L metri.

x posizione della prima biglia

y somma delle posizioni delle 2 biglie

$$p_{xy}(a,b) = p_{y/x=a}(b)\cdot p_x(a) = \frac{1}{L^2}\,\mathrm{rect}\left(\frac{b}{L}-\frac{1}{2}-\frac{a}{L}\right)\cdot \mathrm{rect}\left(\frac{a}{L}-\frac{1}{2}\right)$$



$$p_x(a) = \int p_{xy}(a,b)\,db = \frac{1}{L}\,\mathrm{rect}\left(\frac{a}{L}-\frac{1}{2}\right)$$

$$p_y(b) = \int p_{xy}(a,b)\,da = \frac{1}{L}\,\mathrm{tri}\left(\frac{b}{L}-1\right)$$