Densità di probabilità condizionata di un processo casuale stazionario

17 maggio 2016

Segnali per le Telecomunicazioni

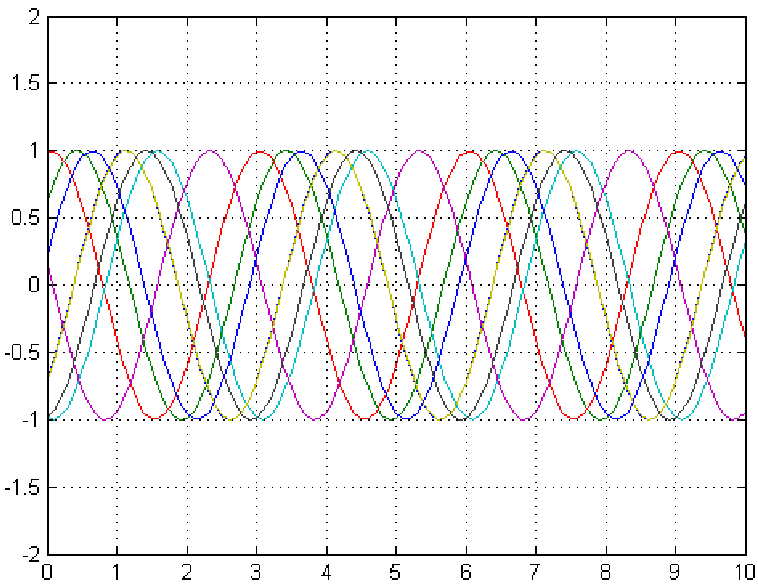
Prof. Claudio Prati

A.A. 2015/2016

Introduzione

Si vuole analizzare la densità di probabilità condizionata del processo casuale stazionario:

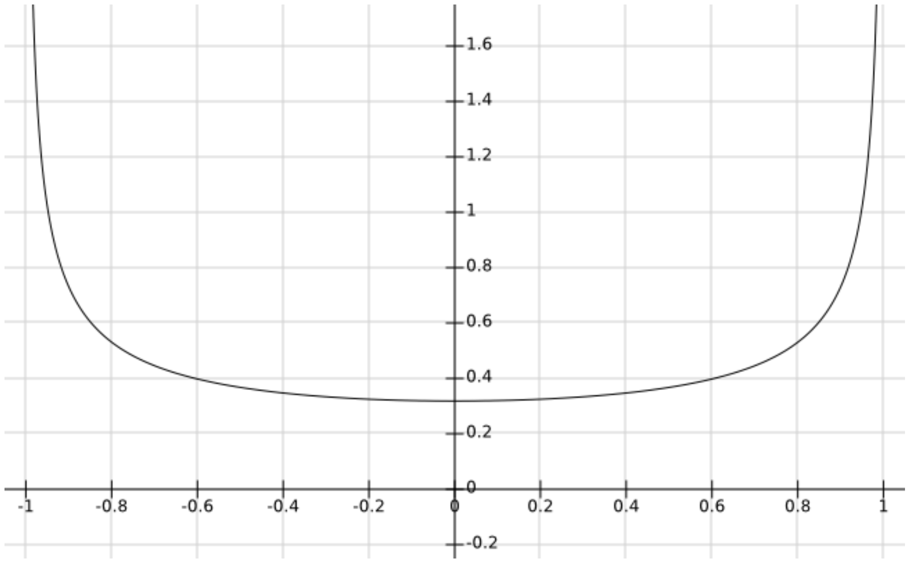
$$x(t) = cos(2\pi f_0 t + \varphi) = cos(\frac{2\pi}{T_0} t + \varphi) = cos(\omega_0 t + \varphi)$$



dove φ è una variabile casuale con distribuzione uniforme in $[0, 2\pi]$.
Del segnale sono noti:

- Il valore atteso: $E[x(t)] = m_{x(t)} = 0$
- La varianza: $Var[x(t)] = \sigma_x^2 = \frac{1}{2}$
- La funzione di autocovarianza[1]: $C_x(t_1, t_2) = R_x(t_1, t_2) = \frac{1}{2}cos(\omega_0(t_2 - t_1))$

Analizzando qualitativamente il segnale, è inoltre possibile tracciare il grafico della sua densità di probabilità di insieme:



Densità di probabilità condizionata

Si vuole ora caratterizzare la densità di probabilità del segnale ad un generico istante t, condizionata al fatto che $x(t_1) = a$:

$$P_{x(t)|x(t_1)=a}(a, b)$$

In altre parole: conoscendo il valore del segnale al tempo t_1, cosa è possibile dire sul futuro (o sul passato) del segnale?

Densità di probabilità

Avendo osservato $x(t_1) = a$, si ha che:

$$a = cos(\omega_0 t + \varphi)$$

da cui si ricavano due possibili valori della variabile casuale φ

$$\begin{cases} \varphi_A = -\omega_0 t_1 + arcos(a) \\ \varphi_B = -\omega_0 t_1 - arcos(a) \end{cases}$$

associati a due possibili realizzazioni del segnale $x(t)$

$$\begin{cases} x_A(t) = cos(\omega_0(t - t_1)) + arcos(a) \\ x_B(t) = cos(\omega_0(t - t_1)) - arcos(a) \end{cases}$$

.

Poiché non sono disponibili ulteriori informazioni che consentano di stabilire quali delle due realizzazioni sia stata effettivamente osservata, le due realizzazioni del segnale sono equiprobabili con probabilità $\frac{1}{2}$.

La densità di probabilità condizionata $P_{x(t)|x(t_1)=a}(a, b)$ sarà dunque composta da due impulsi di area $\frac{1}{2}$, alle posizioni $x_A(t)$ e $x_B(t)$.

[1]Poiché il segnale è stazionario e ha valore medio nullo, l'autocovarianza corrisponde all'autocorrelazione del segnale.

Valore medio

Il valore medio del segnale condizionato $x(t)|_{x(t_1)=a}$ si può calcolare come segue.

Ponendo

$$\begin{cases} \alpha = \omega_0(t - t_1) \\ \beta = arcos(a) \end{cases}$$

si ottiene:

$$\begin{aligned}
&E[x(t)|_{x(t_1)=a}] = \\
&= \frac{1}{2}x_A(t) + \frac{1}{2}x_B(t) = \\
&= \frac{1}{2}cos(\alpha + \beta) + \frac{1}{2}cos(\alpha - \beta) = \\
&= \frac{1}{2}(cos(\alpha)cos(\beta) - sen(\alpha)sen(\beta)) + \frac{1}{2}(cos(\alpha)cos(\beta) + sen(\alpha)sen(\beta)) = \\
&= \frac{1}{2}cos(\alpha)cos(\beta) + \frac{1}{2}cos(\alpha)cos(\beta) = \\
&= cos(\alpha)cos(\beta) = \\
&= cos(\omega_0(t - t_1)) \cdot cos(arcos(a)) = \\
&= a \cdot cos(\omega_0(t - t_1)) = \\
&= a \cdot \rho_x(t - t_!)
\end{aligned}$$

dove $\rho_x(t - t_1)$ è il coefficiente di correlazione del segnale

$$\rho_x(t - t_1) = \frac{C_x(t_1, t)}{\sigma_x^2} = \frac{\frac{1}{2}cos(\omega_0(t - t_1))}{\frac{1}{2}} = cos(\omega_0(t - t_1))$$

.

Varianza

La varianza del segnale condizionato, invece, si calcola come segue (α e β rappresentano le stesse sostituzioni fatte per il calcolo del valore medio).

$$\begin{aligned}
&\sigma^2_{x(t)|x(t_1)=a} = \\
&= E[(x(t)|_{x(t_1)=a})^2] - E^2[x(t)|_{x(t_1)=a}] = \\
&= \frac{1}{2}cos^2(\alpha + \beta) + \frac{1}{2}cos^2(\alpha - \beta) - (\frac{1}{2}cos(\alpha + \beta) + \frac{1}{2}cos(\alpha - \beta))^2 = \\
&= \frac{1}{4}cos^2(\alpha + \beta) + \frac{1}{4}cos^2(\alpha - \beta) - \frac{1}{2}cos(\alpha + \beta)cos(\alpha - \beta) = \\
&= (\frac{1}{2}cos(\alpha + \beta) - \frac{1}{2}cos(\alpha - \beta))^2 = \\
&= (\frac{1}{2}cos(\alpha)cos(\beta) - \frac{1}{2}sen(\alpha)sen(\beta) - \frac{1}{2}cos(\alpha)cos(\beta) - \frac{1}{2}sen(\alpha)sen(\beta))^2 = \\
&= sen^2(\alpha)sen^2(\beta) = \\
&= sen^2(\omega_0(t - t_1)) \cdot (1 - cos^2(arcos(a))) = \\
&= sen^2(\omega_0(t - t_1)) \cdot (1 - a^2) = \\
&= (1 - cos^2(\omega_0(t - t_1))) \cdot (1 - a^2) = \\
&= (1 - \rho_x^2(t - t_1)) \cdot (1 - a^2)
\end{aligned}$$

Osservazioni

Ponendoci nella situazione in cui $\rho_x(t - t_1) = 0$ (campioni $x(t)$ e $x(t_1)$ incorrelati), ovvero quando

$$(t - t_1) = \frac{T_0}{4} + kT_0,\ k \in \mathbb{Z}$$

valgono le seguenti osservazioni:

- se $a = 0$, allora ,$\sigma^2_{x(t)|x(t_1)=0} = 1$ (varianza massima).

  Ovvero: poiché il segnale osservato al momento t_1 vale 0, il valore del segnale a distanza $\frac{T_0}{4}$ da t_1 sarà equiprobabilmente 1 o -1.

- se $a = \pm 1$, allora $\sigma^2_{x(t)|x(t_1)=0} = 0$ (varianza minima).

  Ovvero: poiché il segnale osservato al momento t_1 vale ± 1, il valore del segnale a distanza $\frac{T_0}{4}$ da t_1 sarà necessariamente 0.