

099322 - SEGNALI PER LE COMUNICAZIONI A.A. 2025/26

Data	Dove	09:00	10:00	11:00	12:00	13:00	14:00	15:00	16:00	17:00	18:00
Lunedì											
Martedì	2.1.5										
Mercoledì	21.0.3										
Giovedì											
Venerdì	2.1.5										
Sabato											

Aule Virtuali per attività didattiche



[Aula virtuale - MANZONI MARCO](#)



[Aula virtuale - PRATI CLAUDIO MARIA](#)

Le lezioni verranno registrate per facilitare chi inevitabilmente avrà sovrapposizioni d'orario, ma NON saranno trasmesse in streaming salvo casi particolari comprovati (es. scioperi, malattia ...)

Ora di inizio effettivo: **Martedì** 12:30 + intervallo, **Mercoledì** 10:30 + intervallo, **Venerdì** 8:30 senza intervallo

1ST SEMESTER				EXAM SESSION	2ND SEMESTER				EXAM SESSION	SUMMER HOLIDAYS	EXAM SESSION	
SEPTEMBER 2025	OCTOBER 2025	NOVEMBER 2025	DECEMBER 2025	JANUARY 2026	FEBRUARY 2026	MARCH 2026	APRIL 2026	MAY 2026	JUNE 2026	JULY 2026	AUGUST 2026	SEPTEMBER 2026
1 WED 2 THURS. 3 FRI 4 SAT 5 SUN 6 MON 7 TUE 8 WED 9 THURS. 10 FRI 11 SAT 12 SUN 13 MON 14 TUE 15 MON 16 TUE 17 WED 18 THURS. 19 FRI 20 SAT 21 SUN 22 MON 23 TUE 24 WED 25 THURS. 26 FRI 27 SAT 28 SUN 29 MON 30 TUE	JEW. HOLIDAY JEW. HOLIDAY JEW.											

ALCUNE INFORMAZIONI

LEZIONI

1. Lezioni ed esercitazioni si alterneranno in ITALIANO senza schemi settimanali fissi: gli esercizi seguiranno le lezioni quando sarà necessario fissare le idee su quanto visto in teoria.
2. Oltre a lezioni ed esercitazioni svolgerò 5 sessioni di laboratorio Matlab da 2 ore in classe. La prima lezione sarà un'introduzione veloce a Matlab per chi non lo conoscesse.

ALCUNE INFORMAZIONI

ESAMI

1. NON sono previste prove in itinere, ma solo appelli che consistono nella risoluzione di esercizi scritti. Si vedano gli esempi di temi d'esame pre e post-Covid sulla pagina prati.faculty.polimi.it
2. Il giorno Sabato 6 giugno alle ore 9:00 (aule 9.0.1 e 9.1.2) aggiungerò un appello extra oltre a quelli previsti il 25/6, il 21/7 e il 27/8.
3. Gli iscritti all'indirizzo di TELECOMUNICAZIONI dovranno sostenere una prova da 1 credito che consisterà in un progettino da eseguire in Matlab. Per costoro sono previsti incontri in presenza o a distanza con il docente per eventuali richieste di chiarimento sul progetto. Questa prova è «asincrona» rispetto all'esame da 10 crediti e riceverà la stessa valutazione della prova da 10 crediti.

MATERIALE DIDATTICO

A.A. 2025-2026

claudio.prati@polimi.it

C. Prati, **Segnali e sistemi per le telecomunicazioni**, McGraw-Hill, **capitoli 1-7**



<https://prati.faculty.polimi.it/>

MATERIALE DIDATTICO DEL CORSO DI SEGNALI PER LE TELECOMUNICAZIONI:

Comunicazioni, materiale didattico di teoria, Laboratorio Matlab, Temi d'esame con soluzione dal 2008

MATERIALE DIDATTICO DEL CORSO DI SEGNALI PER LE TELECOMUNICAZIONI

COMUNICAZIONI

File progetto 2021 sullo stacking:

[Progetto_stacking](#)

[Progetto_stacking_facilitato](#)

Materiale didattico teoria

[Formulario](#) a cura di *Federico Badini* e *Stefano Bodini*

[Errori Formulario](#) alcuni errori segnalati da Luca Guida (evidenziati in giallo)

[Predizione Coseno con fase iniziale casuale](#) a cura di *Daniele Grattarola*

Materiale didattico powerpoint

[Probability Basics](#) [Predizione e Incorrelazione](#)

Materiale didattico Matlab

[Descrizione script Matlab](#)

[Numeri Complessi](#)

[Serie di Fourier](#) [Serie di Fourier \(senza cicli "for"\)](#) [Convoluzione](#) [ConvCos](#) [MediaMobile](#) [Chirp](#) [RispostaInFrequenza](#) [ModulazioneIQ](#)
[SincPeriodico](#) [Campionamento](#) [AliasCoseno](#) [AliasFrequenza](#) [Oversampling](#) [TrasformataDiscreta](#)
[InterpFrequenza](#) [InterpTempi](#) [Probability Density](#) [Sinusoidal Random Signals](#) [Linear Prediction](#)
[Limite centrale](#) [ISI](#) [Registratore](#) [InterpLineare](#) [ZeroPaddingElementare](#) [Power Spectral Density](#)
[TrasmissioneBinariaAntipodale](#) [ShiftSinc](#)

Laboratorio Matlab 2021

[Testo PDF Laboratorio 1](#)

[Drawing_Signals](#)

[Numeri complessi](#)

[Serie_Fourier](#)

[Testo PDF Laboratorio 2](#)

Temi d'esame con soluzioni

2008

Appello 1.07.2008	PDF
Prova aggiuntiva 9.07.2008	PDF
Appello 18.07.2008	PDF
Appello 5.09.2008	PDF
Appello 4.02.2009	PDF

2009

Appello 6.07.2009	PDF
Appello 23.07.2009	PDF
Appello 04.09.2009	PDF
Appello 02.02.2010	PDF

2010

Appello 5.07.2010	PDF
Appello 20.07.2010	PDF
Appello 10.09.2010	PDF
Appello 03.02.2011	PDF

2011

Appello 01.07.2011	PDF
Appello 25.07.2011	PDF
Appello 09.09.2011	PDF
Appello 10.02.2012	PDF

2012

Prova 20.06.2012	PDF
Appello 04.07.2012	PDF
Appello 24.07.2012	PDF

LEZIONI A.A. 2024-2025

*Le registrazioni delle lezioni saranno riportate qui di seguito non appena disponibili da webex.
A volte il sistema è molto lento e potrebbe volerci più di un giorno.*

In caso di problemi inviatemi una e.mail

[Introduzione al corso 24/25 powerpoint](#)

[Segnali, Scalini e Impulsi. 19-2-25](#)

[Esponenziali complessi 21-2-25](#)

[Serie di Fourier 21-2-25](#)

[Proprietà della serie di Fourier 25-2-25](#)

[Esponenziali discreti + somma di convoluzione 25-2-25](#)

[Filtri FIR e IIR 26-2-25](#)

[INTEGRALE DEL SENO CARDINALE \(Feynman\)](#)

[Convoluzione1 28-2-25](#)

[Convoluzione2 28-2-25](#)

[Trasformata di Fourier 28-2-25 \(manca l'audio... sorry!. Sostituisco con lez anno scorso\)](#)

[Trasformata di Fourier 5-3-24](#)

[TF di segnali reali 4-3-25](#)

[TF della convoluzione 4-3-25](#)

[LAB 1 5-3-25](#)

[TF della modulazione 7-3-25](#)

[TF della derivata e integrale 7-3-25](#)

[Parseval 11-3-25](#)

[Auto e cross correlazione 11-3-25](#)

[Esercizi su Trasformate di Fourier 12-3-25](#)

[Trasformata di Fourier di segnali discreti 14-5-25](#)

[Trasformata della convoluzione e modulazione discreta 18-3-25](#)

[Auto e cross-correlazione discreta 18-3-25](#)

[Laboratorio Matlab su Convoluzioni 19-3-25](#)

[Esercizi su TF di segnali discreti 21-3-25](#)

[Interpolatore con zeri interlacciati 21-3-25](#)

[Esercizi su alias in frequenza 25-3-25](#)

[Teorema del campionamento 25-3-25](#)

[Metodi pratici di ricostruzione segnali campionati 26-3-25](#)

[Esercizi di campionamento nel tempo e in frequenza 28-3-25](#)

[La DFT \(Discrete Fourier Transform\) 28-3-25](#)

I CONTENUTI DEL CORSO IN POCHI ESEMPI

I **SEGNALI** sono rappresentazioni di misure di grandezze fisiche che evolvono in funzione di altre *grandezze indipendenti*.

Ad esempio la musica negli auricolari: Una tensione elettrica ai capi di dispositivo elettronico che evolve in funzione del *tempo*: $v(t)$

Ad esempio una fotografia digitale: una quantità di fotoni rilevata da un dispositivo elettronico (es: sensore CMOS) distribuita diversamente in funzione dello *spazio 2D*: $I(x, y)$



Segnali deterministici e casuali

I segnali **deterministici** sono rappresentati da funzioni il cui valore è noto per qualsiasi valore della variabile indipendente.

Si studiano con gli strumenti matematici studiati nei corsi di Analisi Matematica.

I segnali **casuali** sono rappresentati da funzioni il cui valore è noto solo in probabilità per qualsiasi valore della variabile indipendente.

Si studiano con gli strumenti matematici studiati nei corsi di Analisi Matematica e di Probabilità.

Le basi della teoria delle Probabilità verranno richiamate.

INTRODUZIONE ALLE PROBABILITA'

Brevi lezioni registrate



SET102 - Introduction to probability and random...

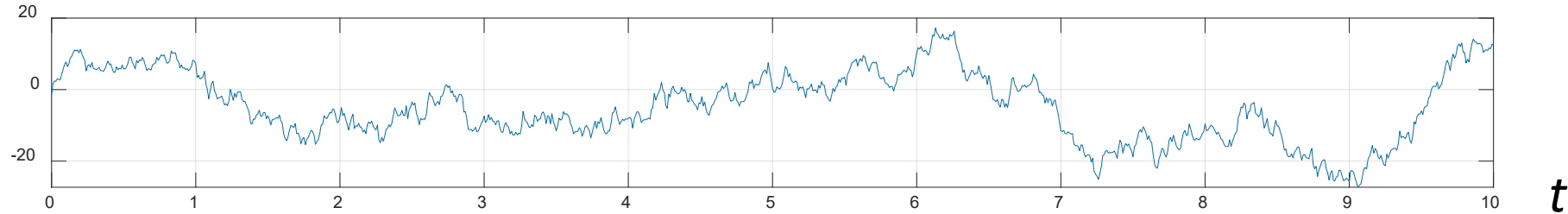
di Polimi OpenKnowledge

Playlist • 6 video • 298 visualizzazioni

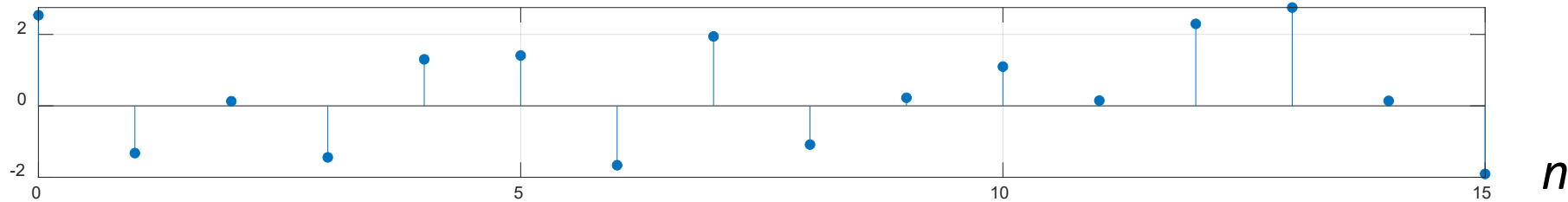
Riproduci tutto

- 1 **Introduction to probability and random variables - Claudio Maria Prati**
Polimi OpenKnowledge • 260 visualizzazioni • 7 mesi fa
2:42
- 2 **Introduction to probability - Claudio Maria Prati**
Polimi OpenKnowledge • 195 visualizzazioni • 7 mesi fa
12:47
- 3 **Random variables - Claudio Maria Prati**
Polimi OpenKnowledge • 165 visualizzazioni • 7 mesi fa
14:05
- 4 **Main parameters describing a random Variable - Claudio Maria Prati**
Polimi OpenKnowledge • 115 visualizzazioni • 7 mesi fa
15:52
- 5 **The relationship between two random variables - Claudio Maria Prati**
Polimi OpenKnowledge • 82 visualizzazioni • 7 mesi fa
12:59
- 6 **PDF and histogram (Matlab) - Claudio Maria Prati**
Polimi OpenKnowledge • 152 visualizzazioni • 7 mesi fa
8:20

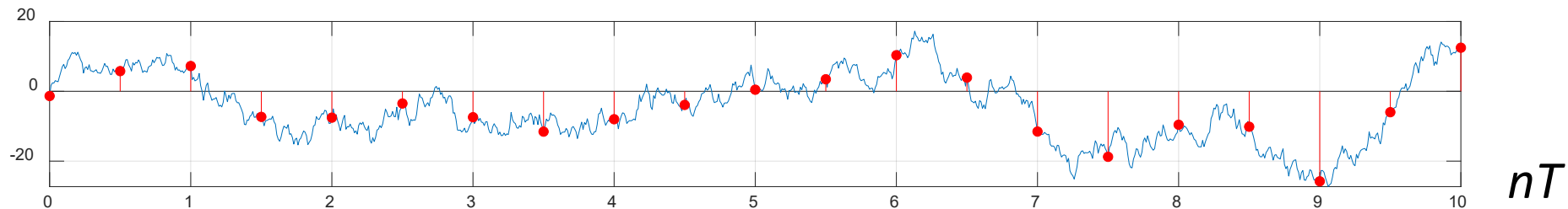
SEGNALI TEMPO-CONTINUI: segnali che dipendono da una variabile che può assumere **valori reali con continuità**



SEGNALI DISCRETI: segnali che dipendono da una variabile che può assumere solo **valori interi spaziati ad intervalli regolari o meno.**



SEGNALI CAMPIONATI: segnali discreti ricavati da segnali tempo-continui misurati ad **intervalli reali discreti.**

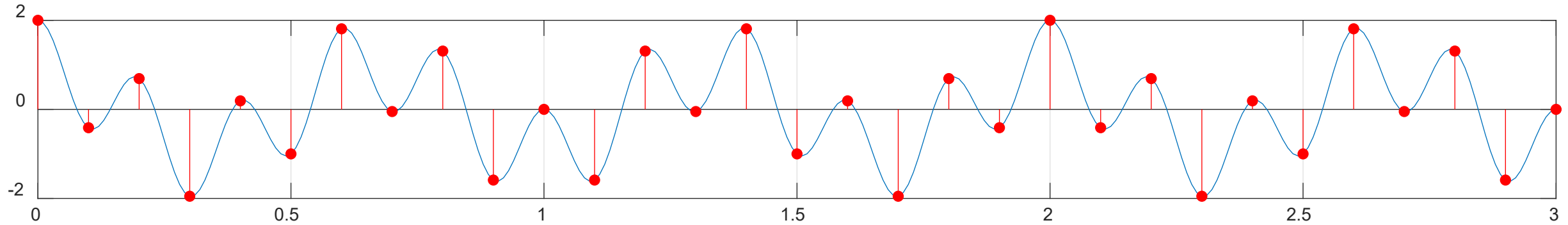


NEL CORSO STUDIEREMO ALCUNI IMPORTANTI
PRINCIPI UTILIZZATI NELL'INGEGNERIA E DEGLI
STRUMENTI MATEMATICI ADATTI AD ANALIZZARLI

Il teorema del campionamento

Ci dice con quale intervallo T occorre campionare un segnale tempo-continuo $x(t)$ per non perdere informazione.

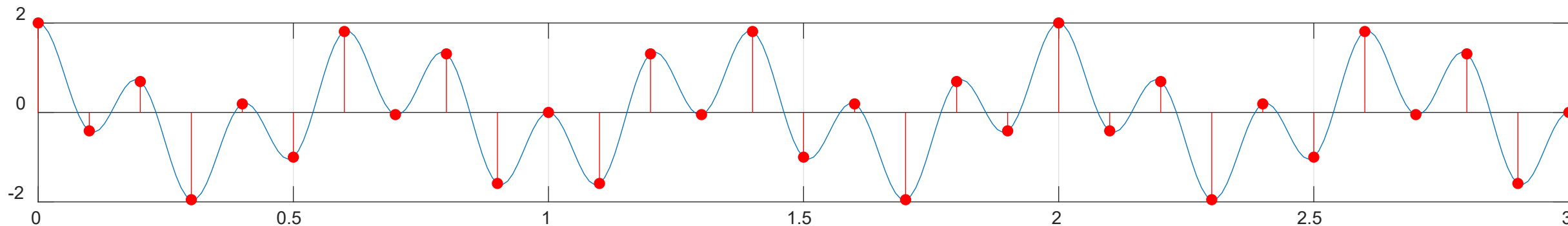
$T = 0.1s$ é sufficiente a non perdere informazione



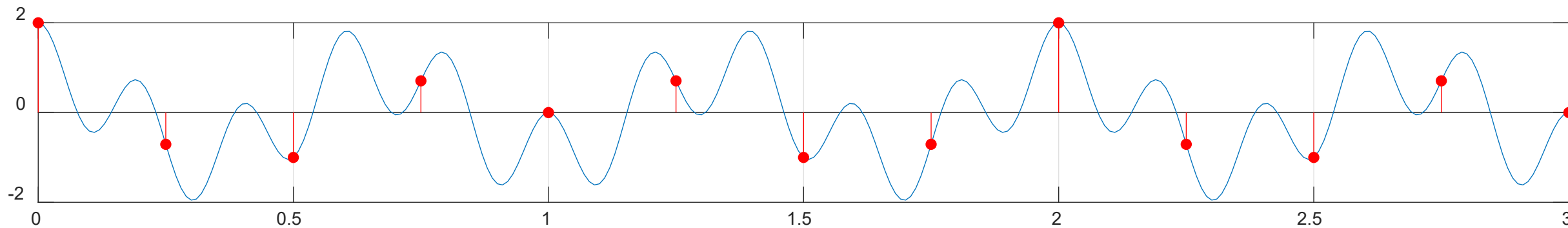
Il teorema del campionamento

Ci dice con quale intervallo T occorre campionare un segnale tempo-continuo $x(t)$ per non perdere informazione.

$T = 0.1s$ é sufficiente a non perdere informazione

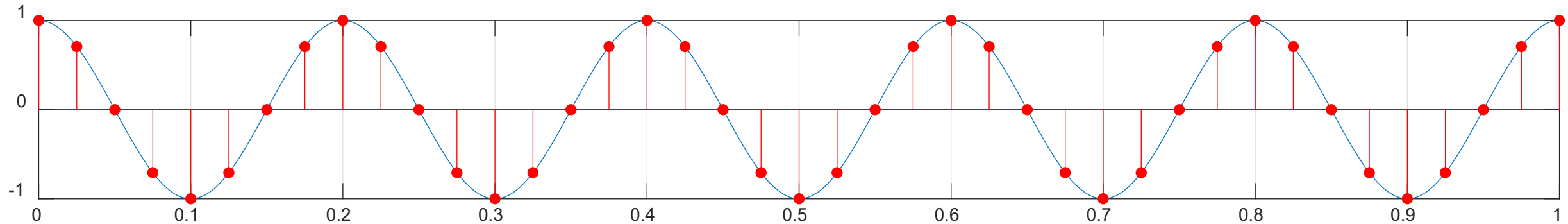


Con $T = 0.25s$ si perde informazione



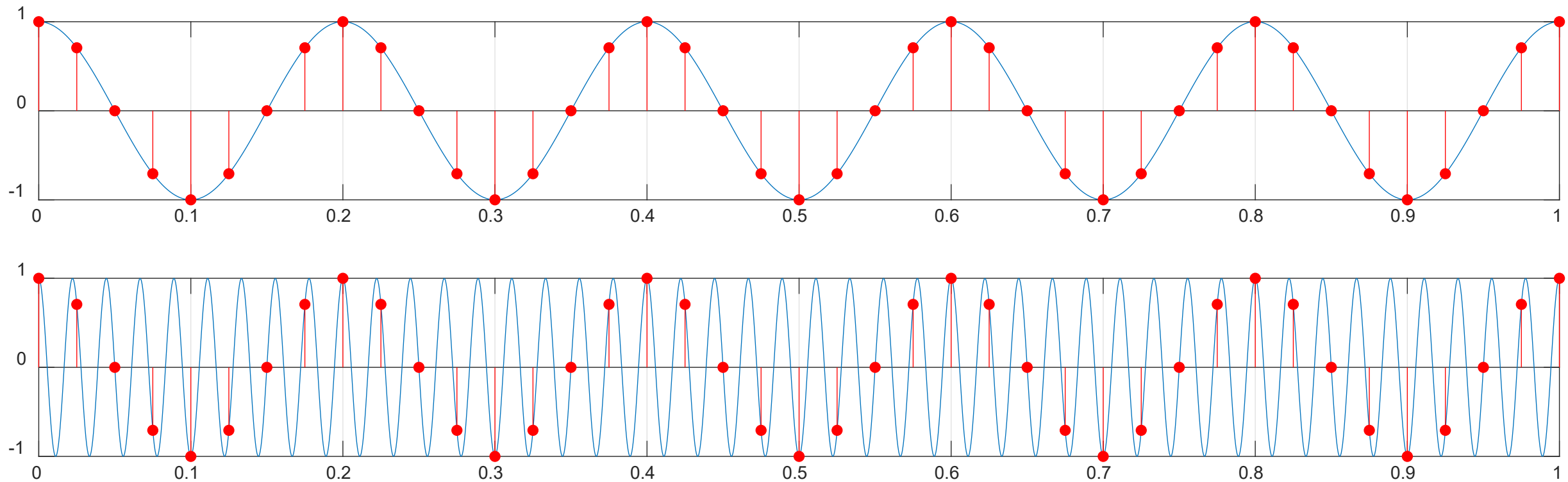
ALIAS (equivocazione) in frequenza

Ci sono *infiniti segnali tempo-continui* associati ad uno stesso segnale campionato, ma *solo uno che rispetta il teorema del campionamento*.

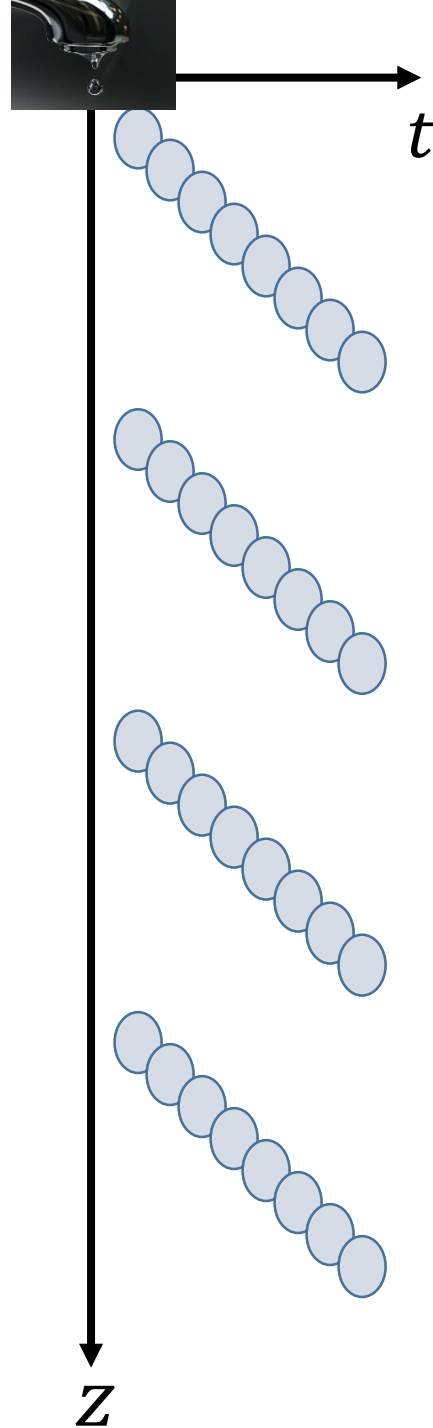


ALIAS (equivocazione) in frequenza

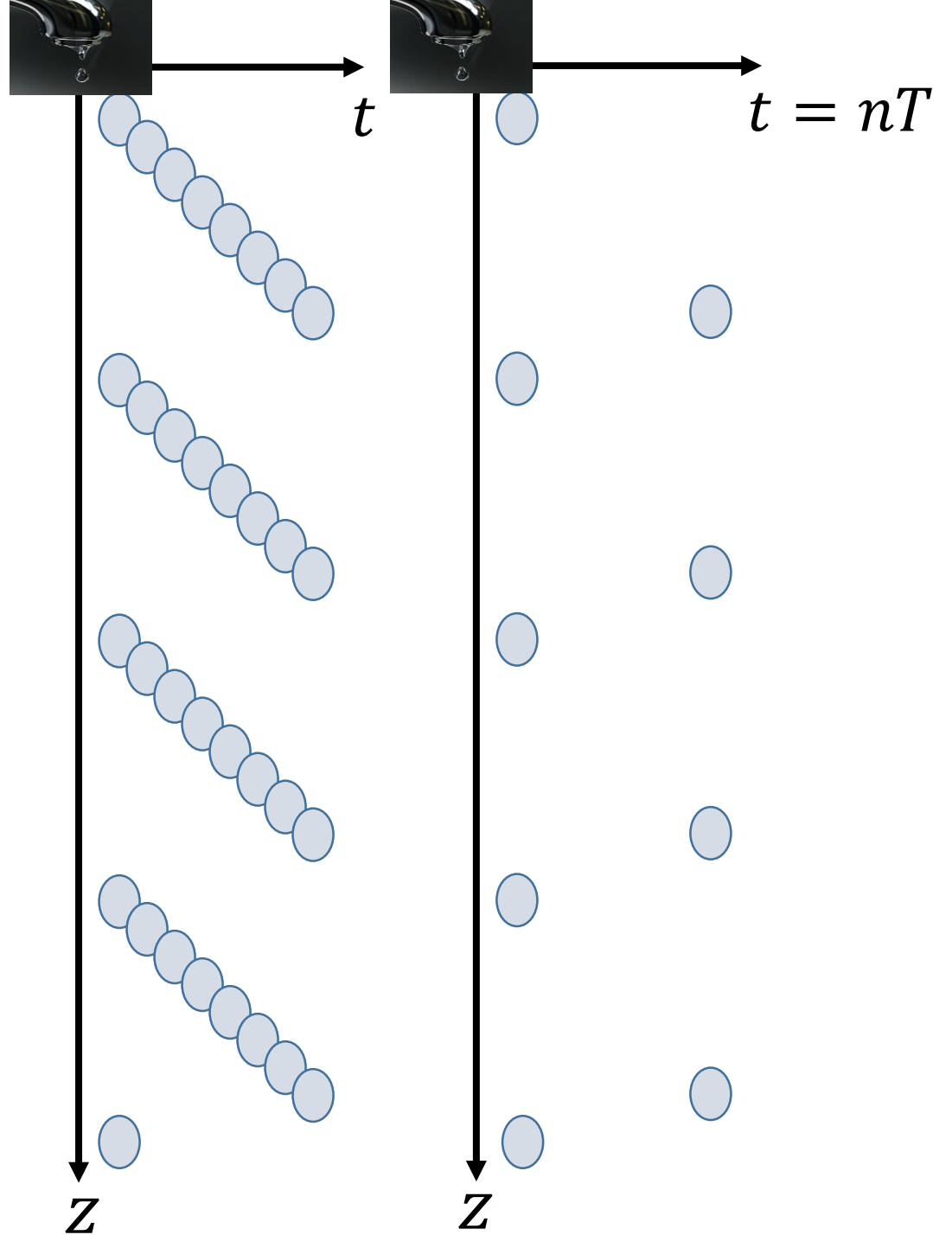
Ci sono *infiniti segnali tempo-continui* associati ad uno stesso segnale campionato, ma *solo uno che rispetta il teorema del campionamento*.

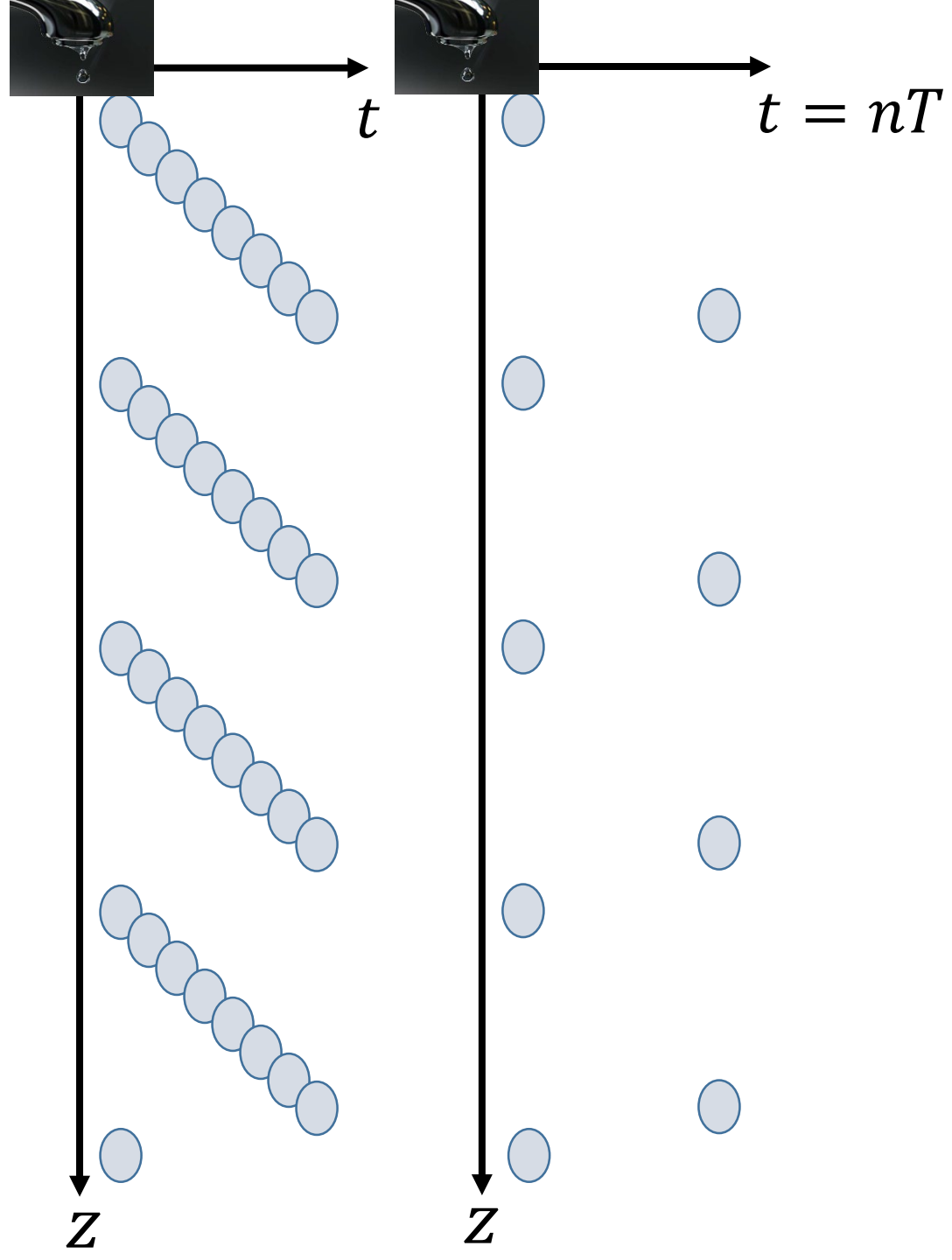
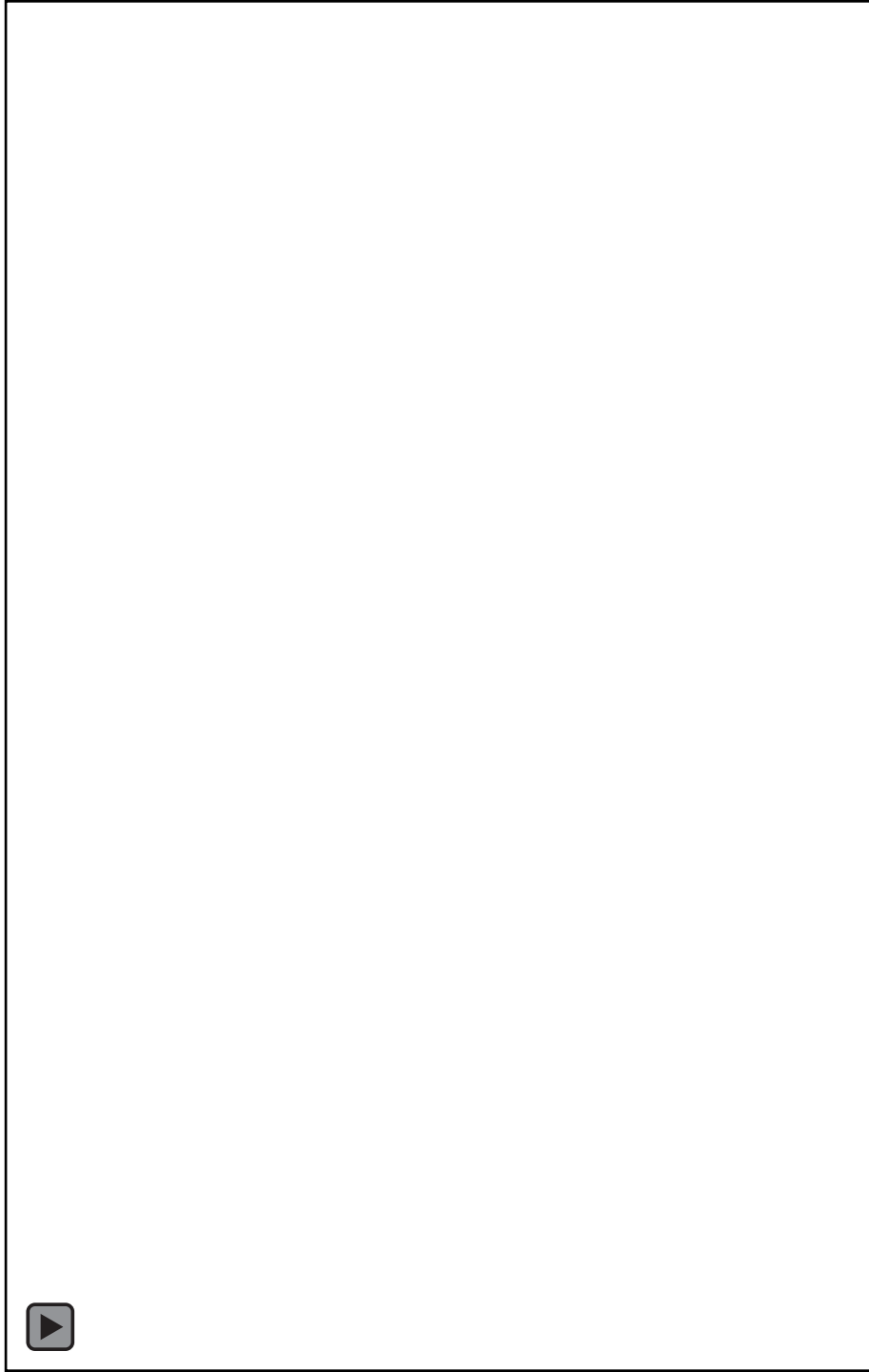


Invertiamo la freccia del tempo:
gocce d'acqua in un campo
antigravitazionale



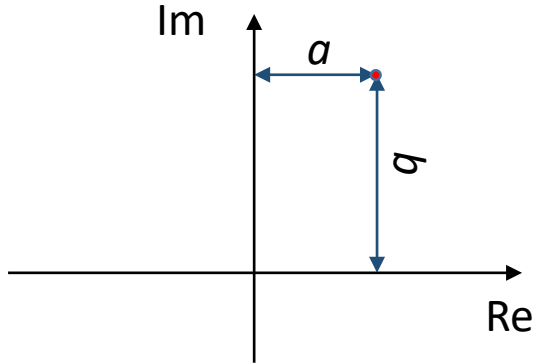
Invertiamo la freccia del tempo:
gocce d'acqua in un campo
antigravitazionale





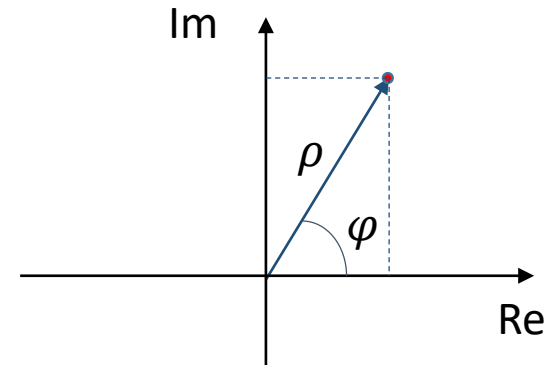
La notazione complessa

Nello studio dei segnali utilizzeremo molto spesso la notazione complessa



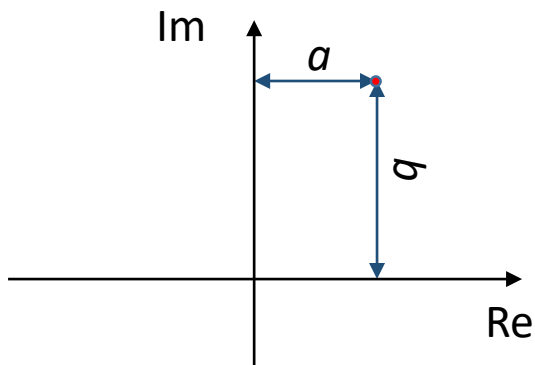
$$a + ib = \rho e^{j\varphi}$$

Cartesiana o Polare



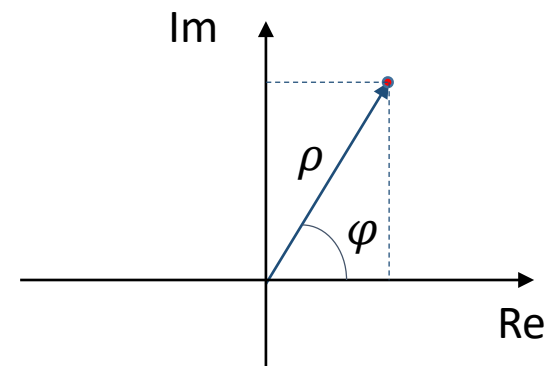
...non perché sia necessaria (i segnali fisici sono reali), ma perché molto più compatta e semplice per fare i calcoli quando ci sono in gioco funzioni trigonometriche

Relazione di Eulero



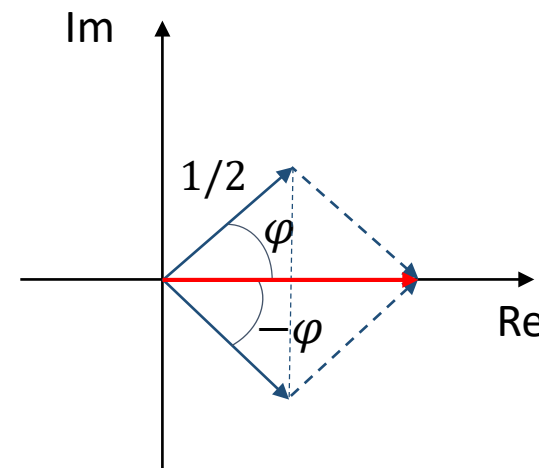
$$a + ib = \rho e^{j\varphi}$$

Cartesiana o Polare



$$e^{j\varphi} = \cos \varphi + j \sin \varphi$$

$$\frac{1}{2} e^{j\varphi} + \frac{1}{2} e^{-j\varphi} = \cos \varphi$$



TEMPO E FREQUENZA

Il passaggio dal dominio del tempo a quello della frequenza e viceversa, si ottiene grazie ad una particolare trasformazione matematica: la cosiddetta **Trasformata di Fourier**.

... dal tempo alla frequenza

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp\{-j2\pi ft\} dt$$



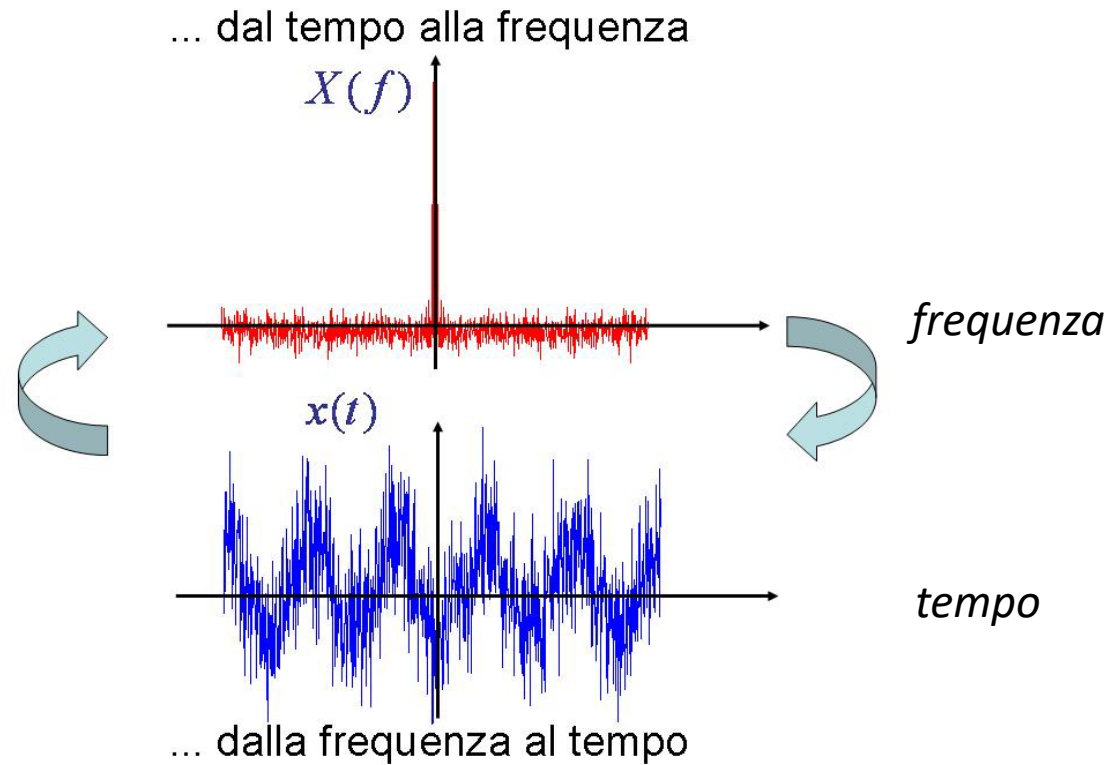
$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \exp\{j2\pi ft\} df$$



(somma «integrale» di tanti esponenziali complessi che sono essenzialmente sinusoidi)

... dalla frequenza al tempo

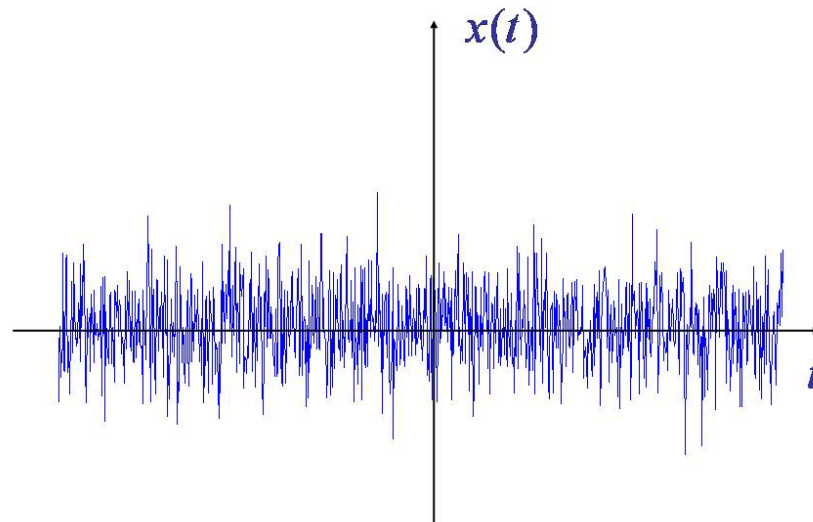
Una volta rappresentato il segnale nel dominio della frequenza è spesso possibile evidenziarne caratteristiche che sono difficilmente individuate nel tempo.



Se consideriamo, ad esempio, un debolissimo segnale radio proveniente da una stella lontana ricevuto da un radiotelescopio...



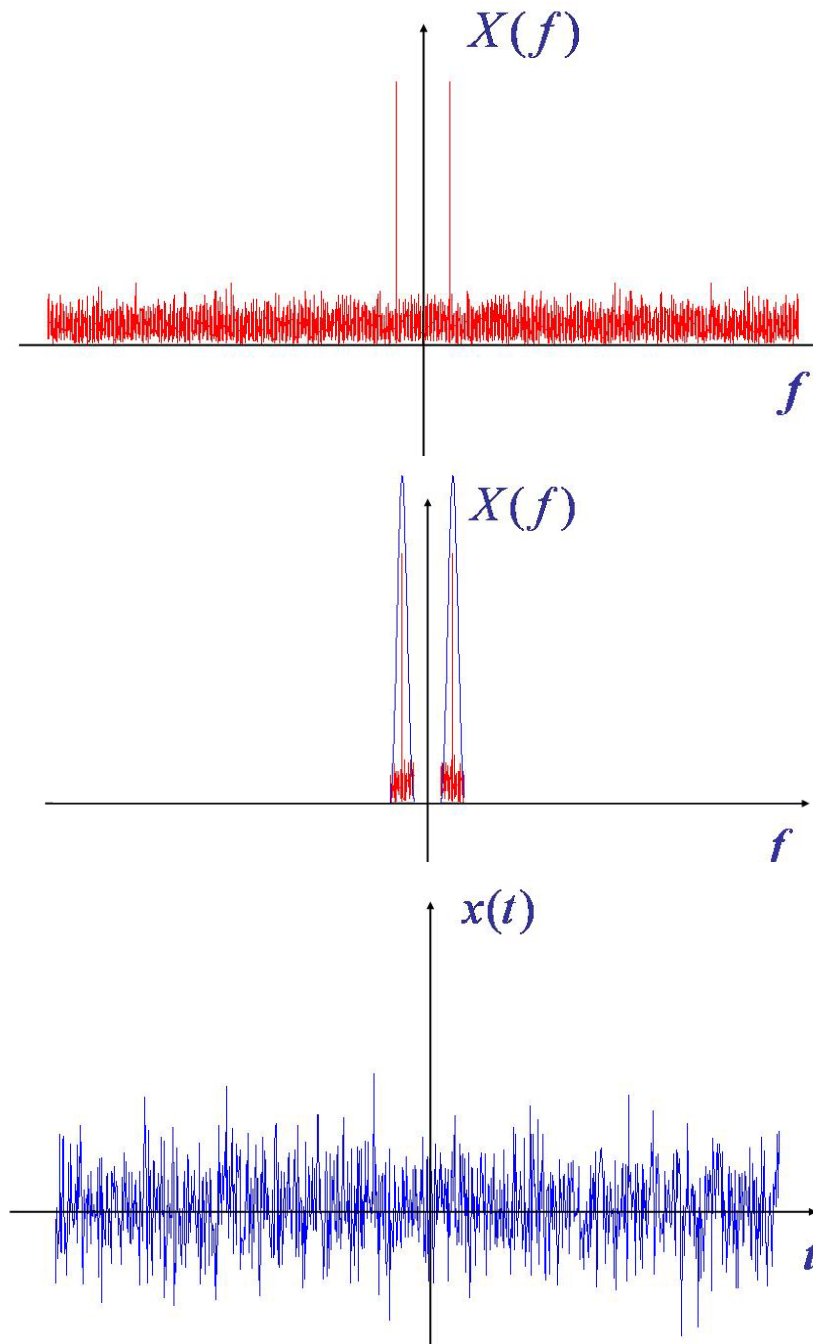
... questo sarà completamente "coperto" dal rumore uniforme di fondo e quindi risulterà invisibile nel tempo.



Tuttavia, passando nel dominio della frequenza, si nota chiaramente un picco spettrale svettare sul rumore di fondo che è uniforme anche in frequenza.

E' immediato eliminare la maggior parte del rumore di fondo mantenendo inalterato il picco spettrale con una semplice moltiplicazione in frequenza.

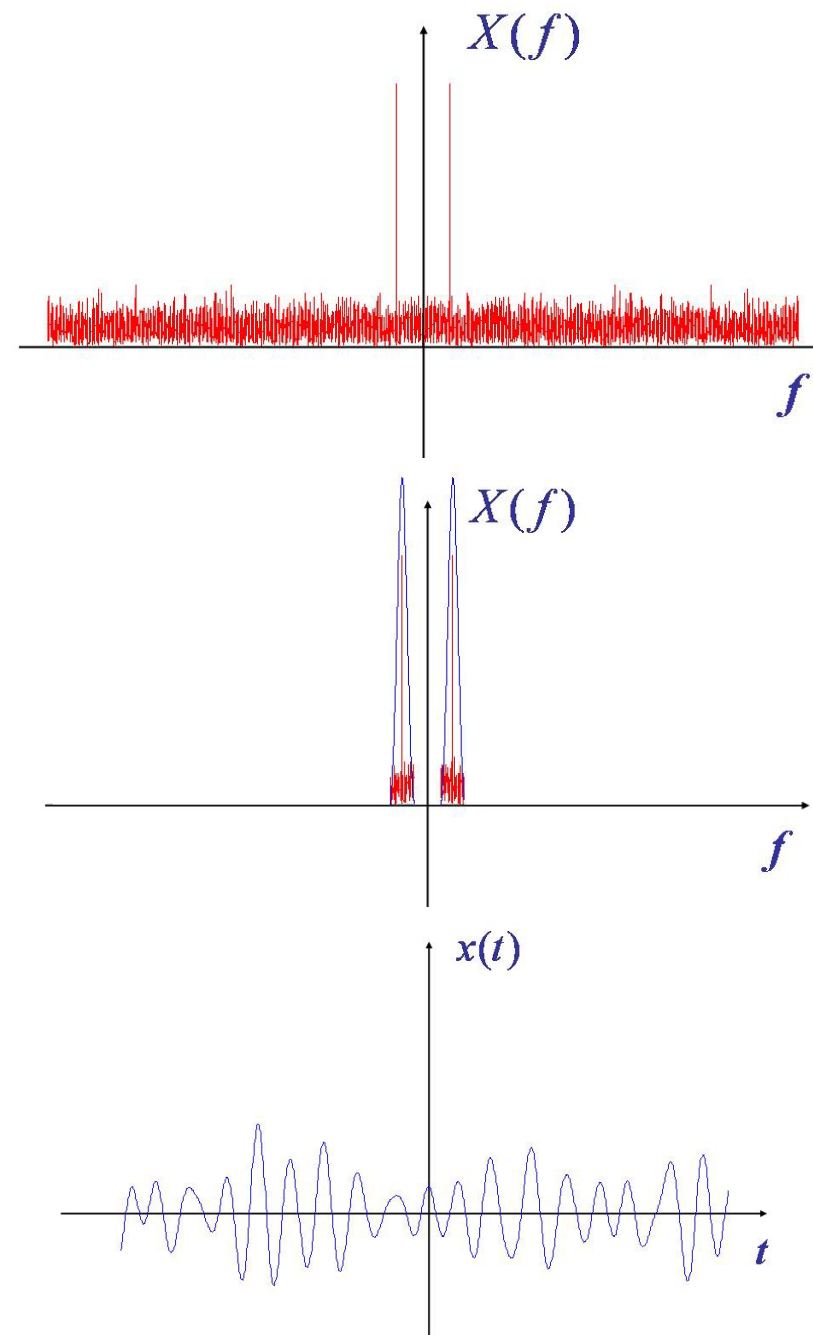
Ritornando poi nel dominio del tempo, si ottiene una versione del segnale ripulita dal rumore di fondo.



Tuttavia, passando nel dominio della frequenza, si nota chiaramente un picco spettrale svettare sul rumore di fondo che è uniforme anche in frequenza.

E' immediato eliminare la maggior parte del rumore di fondo mantenendo inalterato il picco spettrale con una semplice moltiplicazione in frequenza.

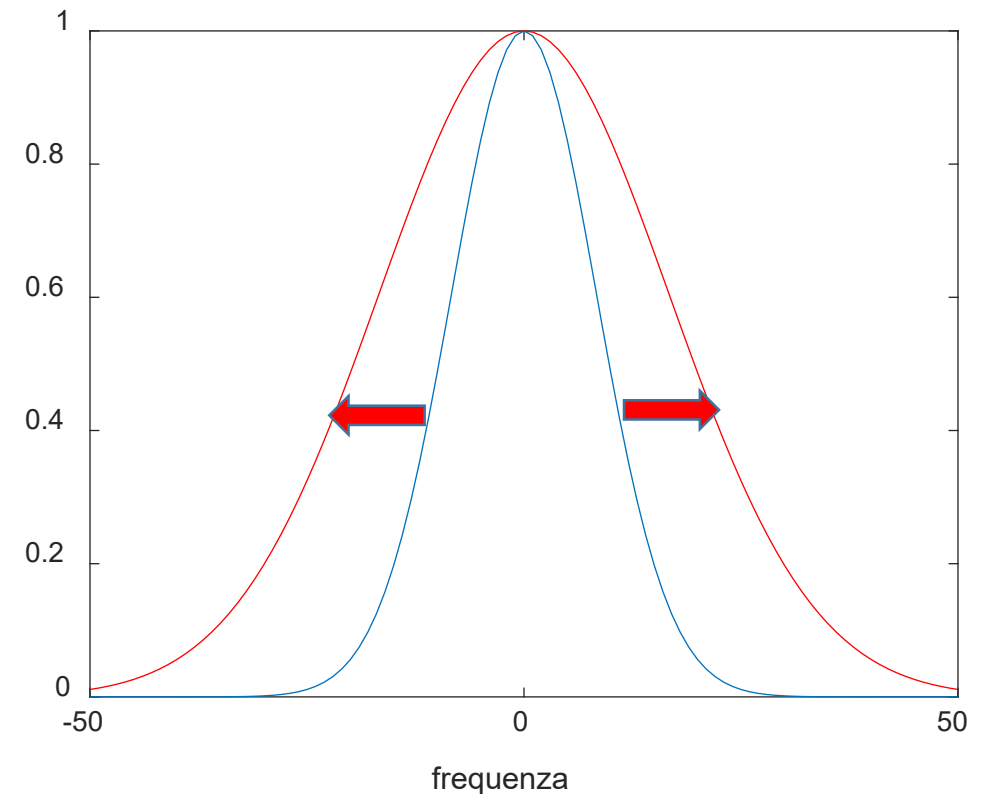
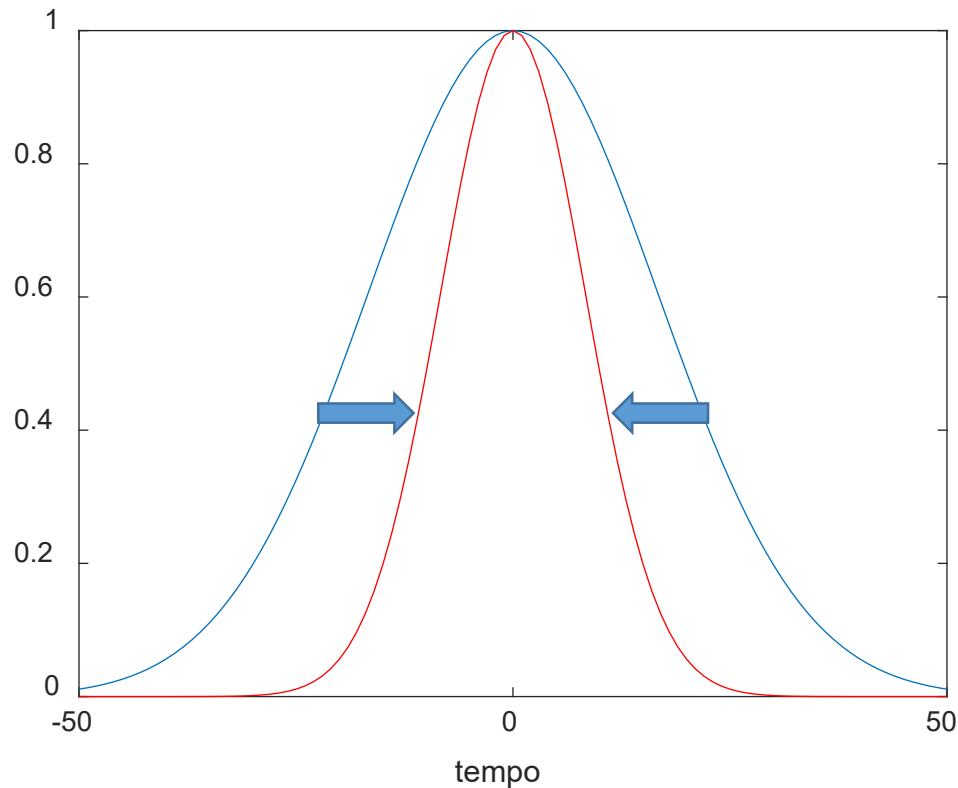
Ritornando poi nel dominio del tempo, si ottiene una versione del segnale ripulita dal rumore di fondo.



PRODOTTO TEMPO BANDA

Nel mondo dell'elaborazione dei segnali, delle Telecomunicazioni e in generale in tutte le applicazioni dell'ingegneria e della fisica, è di grande importanza il principio che stabilisce la costanza tra durata nel tempo e occupazione di banda in frequenza di qualsiasi segnale.

In altri termini, più un segnale è localizzato nel tempo, maggiore sarà la sua larghezza di banda. Viceversa, più stretta è la banda di frequenze occupata da un segnale, maggiore sarà la dispersione del segnale nel tempo.



Trasformata di Fourier e principio d'indeterminazione di Heisemberg

La costanza del prodotto tempo-banda è alla base del **principio d'indeterminazione di Heisemberg**: il prodotto tra quantità di moto $p = mv$ e posizione x di una particella di massa m è costante.

In altri termini meglio è localizzata una particella nello spazio, più sarà incerta la sua quantità di moto.

Infatti la descrizione di una particella in meccanica quantistica si basa sulla soluzione **dell'equazione di Schroedinger**. Se la particella è «libera» (non soggetta ad alcun potenziale), con un certo momento $p = mv$, la soluzione dell'equazione di Schroedinger è una «sinusoide» con una frequenza spaziale p/h dove h è la costante di Plank.

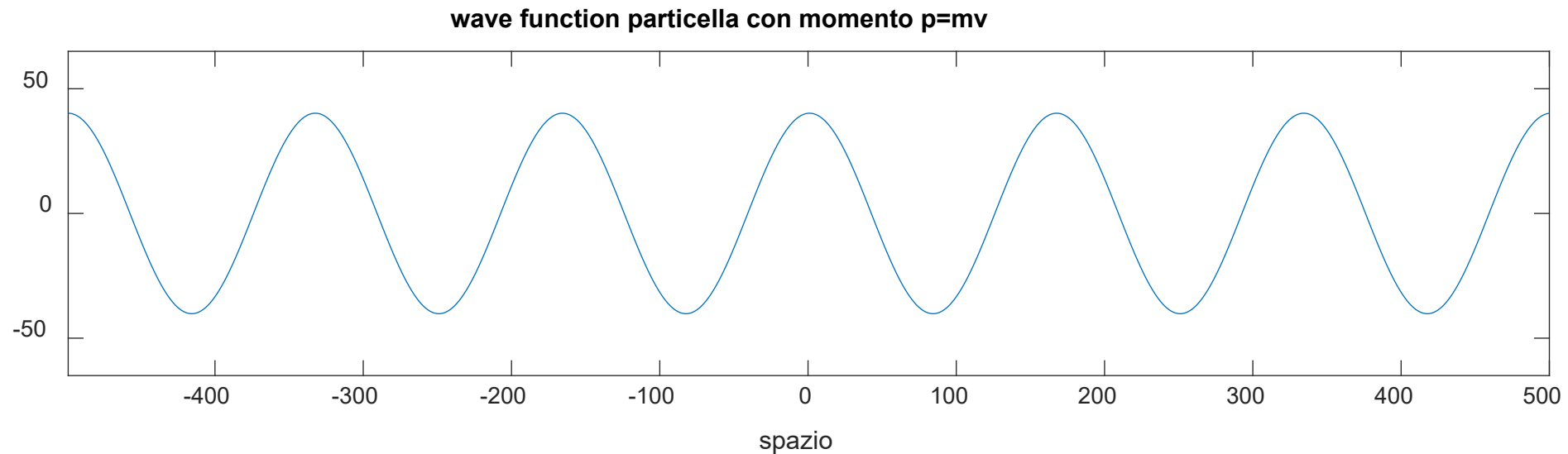
$$\Psi(x, t) = Ae^{jk_x x} e^{-j2\pi f_o t}$$

dove il numero d'onda è legato al momento $k_x = \frac{2\pi p}{h}$ e la frequenza $f_o = \frac{E}{h}$ all'energia totale della particella.

Trasformata di Fourier e principio d'indeterminazione di Heisemberg

Quindi una particella con determinato momento è completamente delocalizzata nello spazio. Trascurando la componente temporale che modula l'ampiezza della componente spaziale, la wave function di una particella libera con un ben preciso momento p è:

$$\Psi(x) = Ae^{jk_x x} \quad k_x = \frac{2\pi p}{h}$$



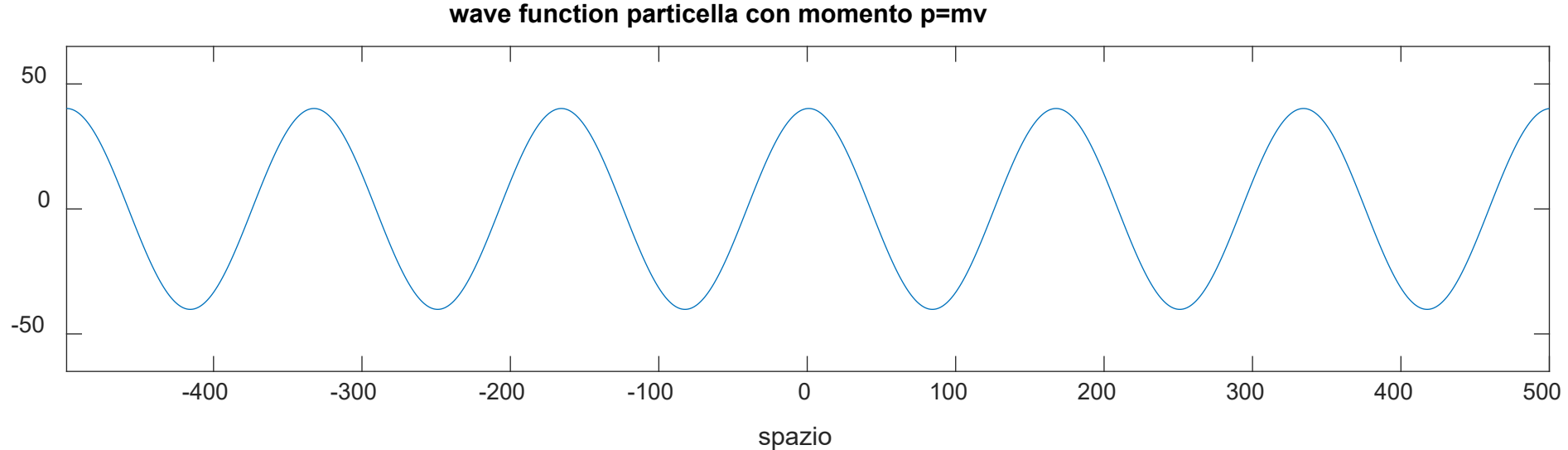
Il modulo quadrato della wave function è proporzionale alla probabilità di trovare la particella in quella posizione. Nel caso della **particella isolata a momento definito**, la probabilità è costante per qualsiasi posizione nello spazio.

$$|\Psi(x)|^2 = A^2$$

Trasformata di Fourier e principio d'indeterminazione di Heisemberg

Quindi una particella con determinato momento è completamente delocalizzata nello spazio. Trascurando la componente temporale che modula l'ampiezza della componente spaziale, la wave function di una particella libera con un ben preciso momento p è:

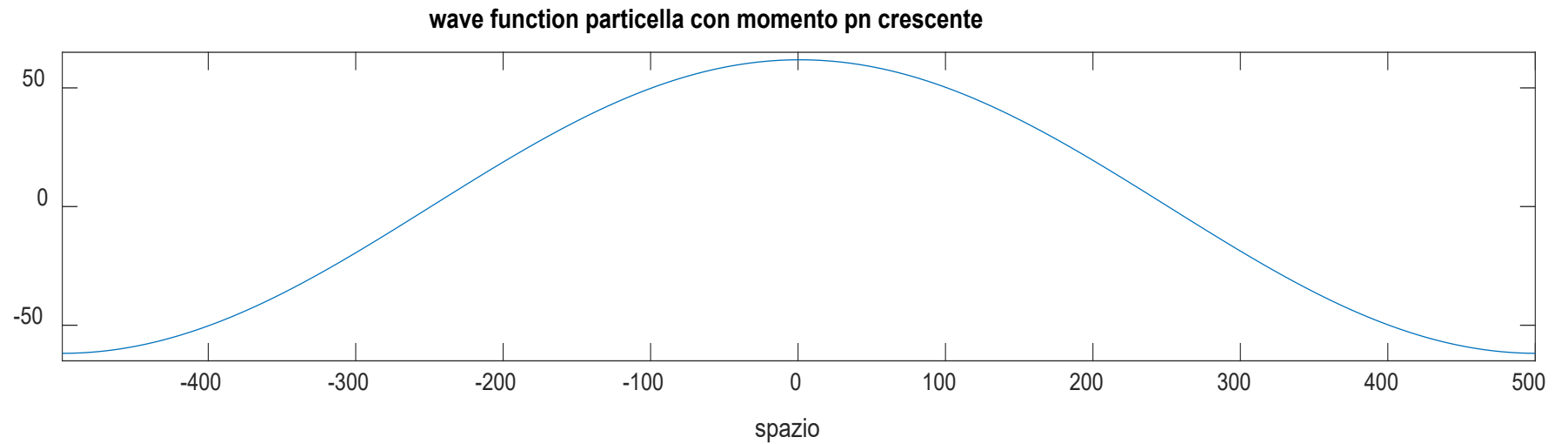
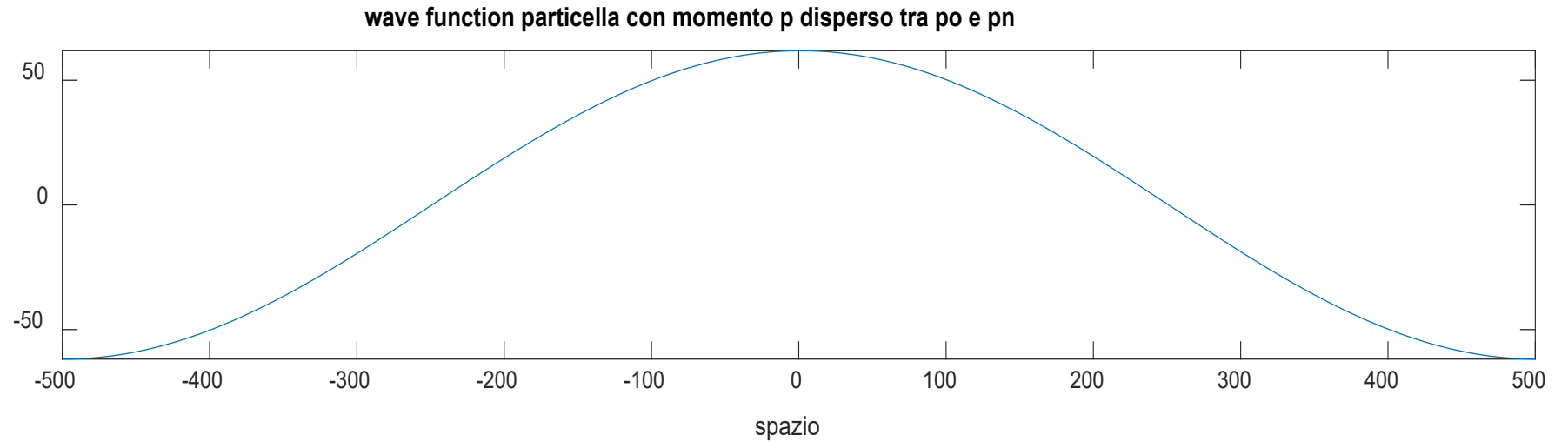
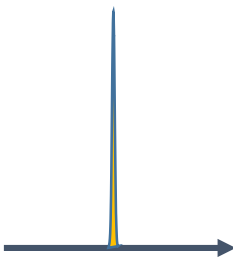
$$\Psi(x) = Ae^{jk_x x} \quad k_x = \frac{2\pi p}{h}$$



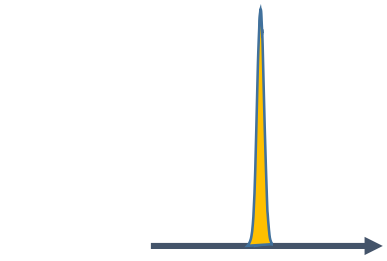
Se però **aumenta l'incertezza di p** , cioè se si aggiungono altri possibili valori di p , la soluzione dell'equazione di Schroedinger sarà la somma di tante sinusoidi con frequenze spaziali k_x diverse (trasformata di Fourier) che producono **una wave function sempre meno dispersa nello spazio**.

Trasformata di Fourier e principio d'indeterminazione di Heisemberg

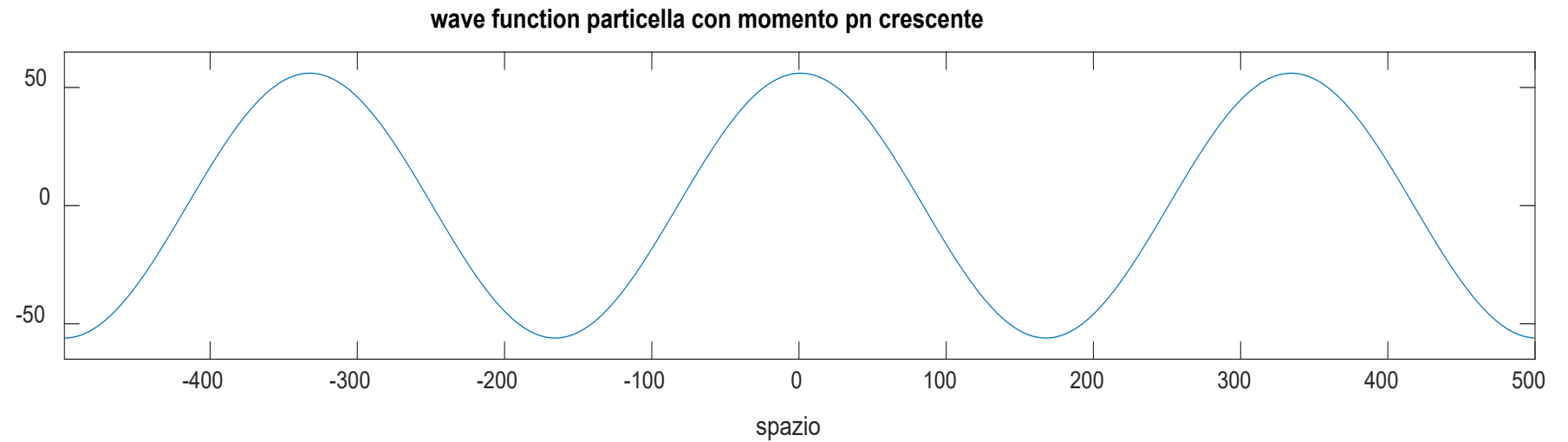
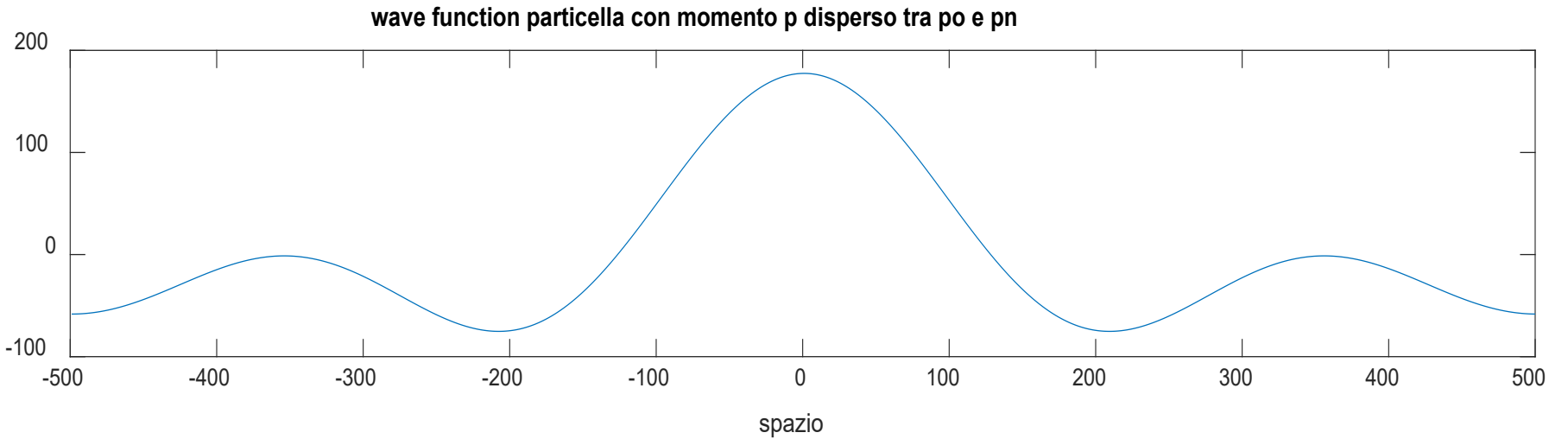
Dispersione del momento



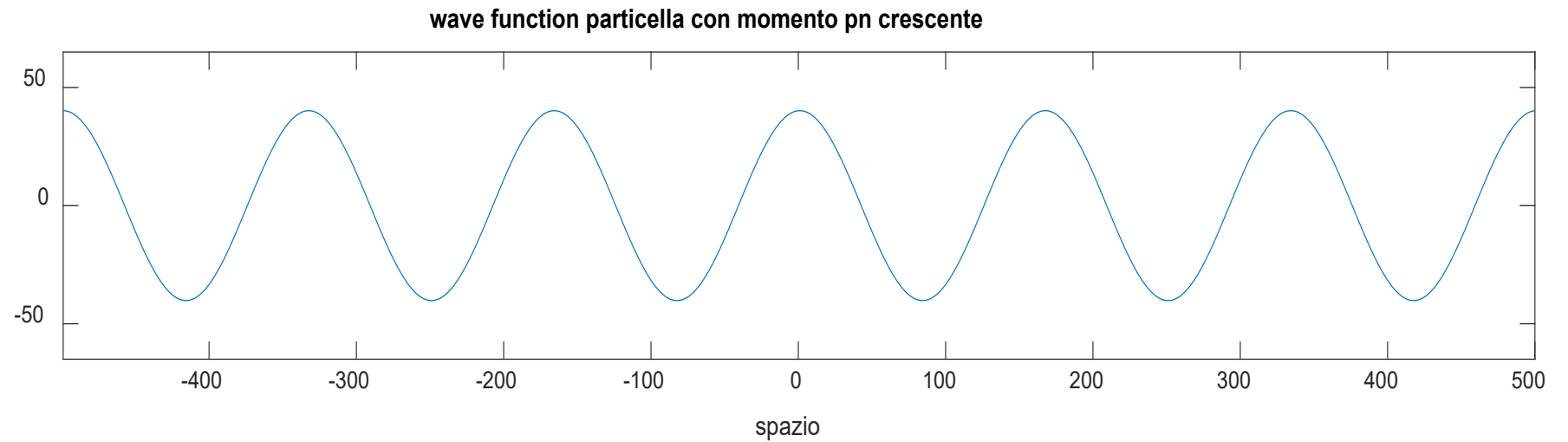
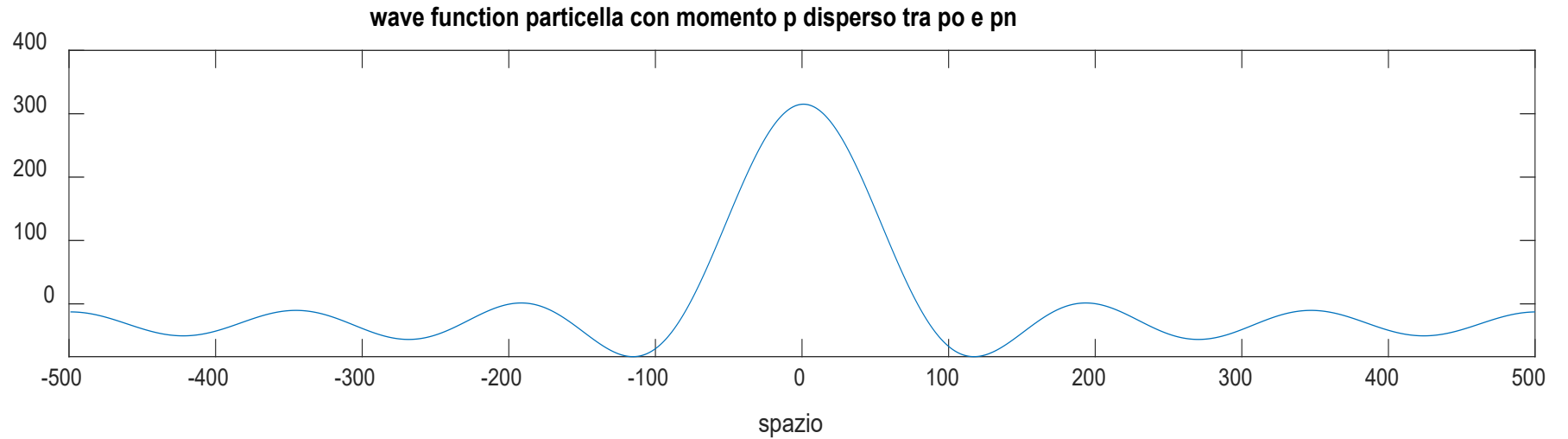
Trasformata di Fourier e principio d'indeterminazione di Heisemberg



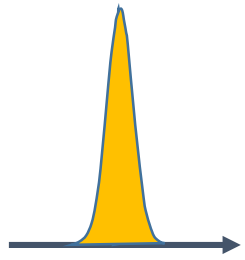
Dispersione del momento



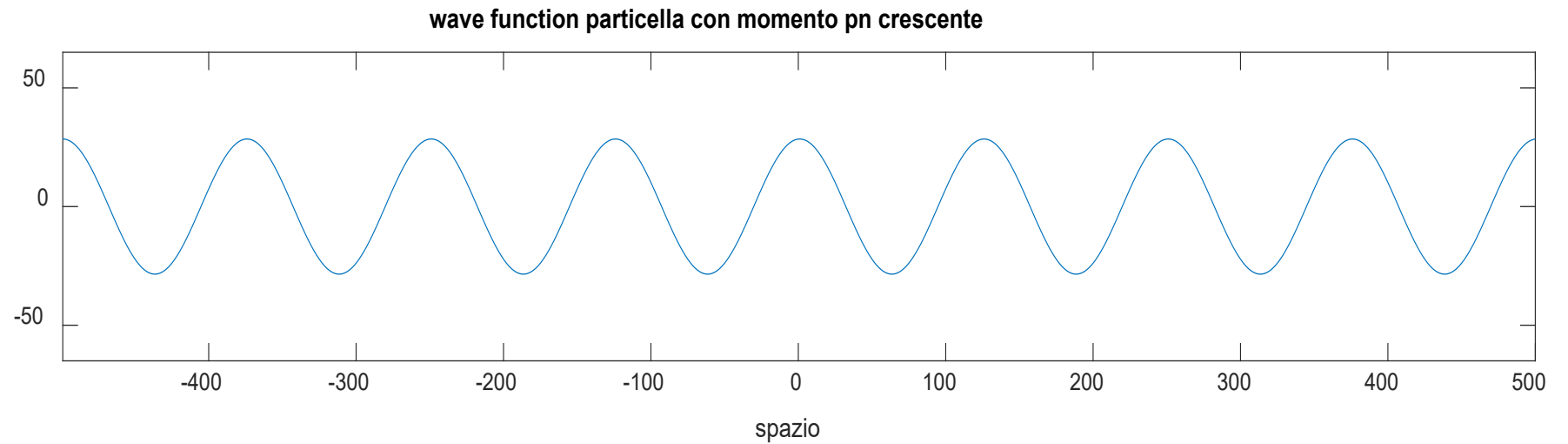
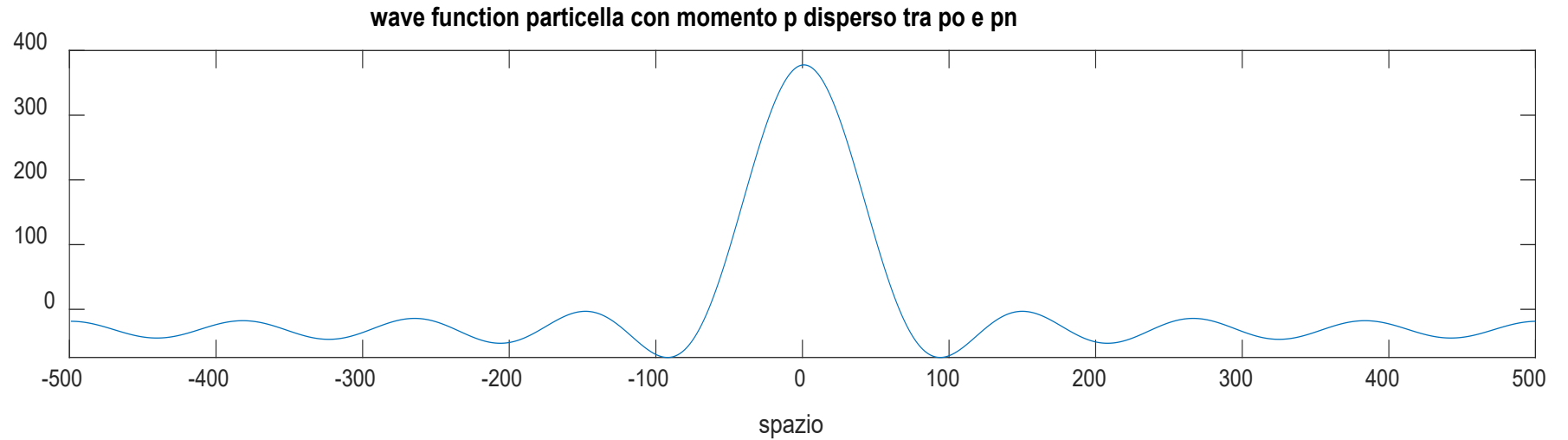
Trasformata di Fourier e principio d'indeterminazione di Heisemberg



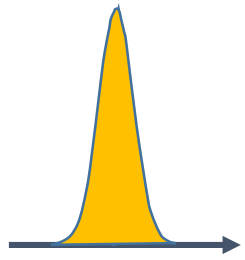
Trasformata di Fourier e principio d'indeterminazione di Heisemberg



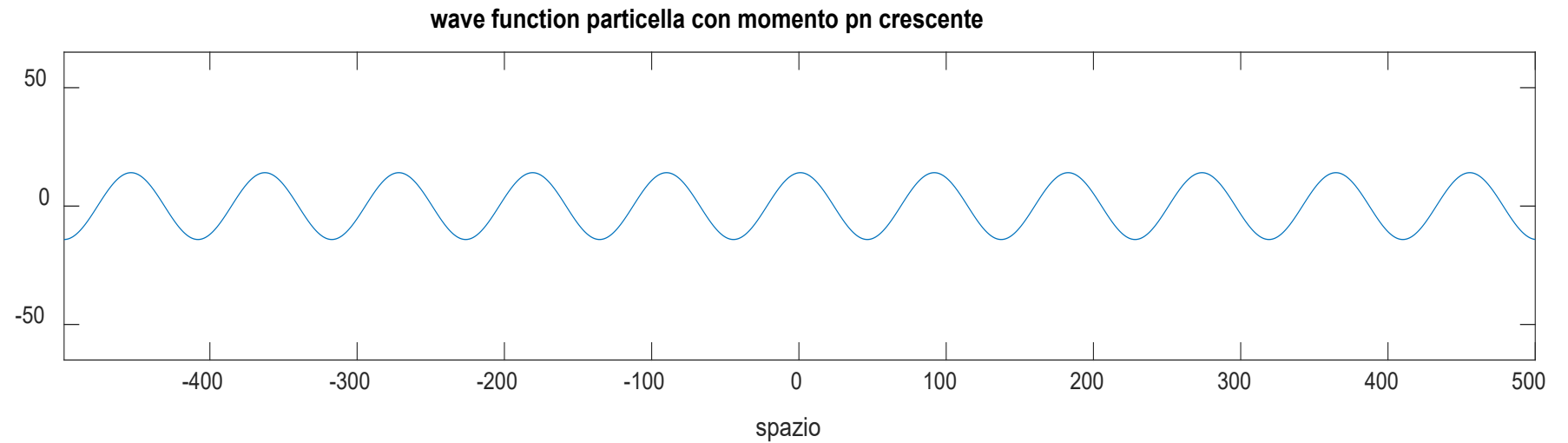
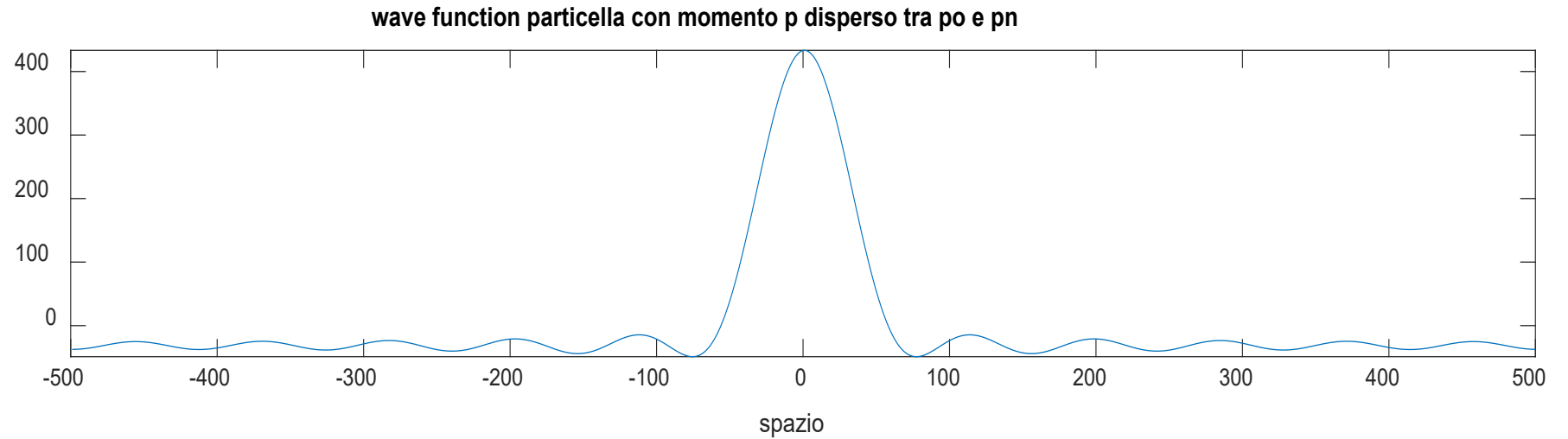
Dispersione del momento



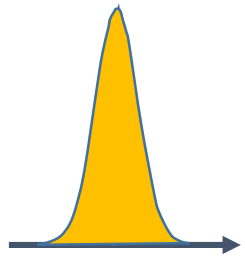
Trasformata di Fourier e principio d'indeterminazione di Heisemberg



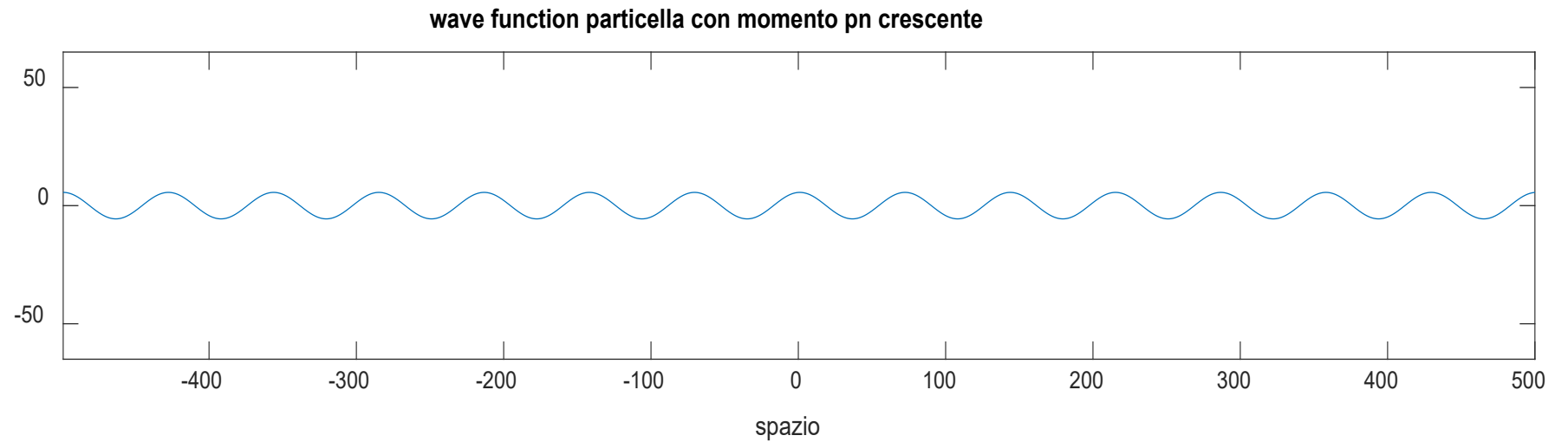
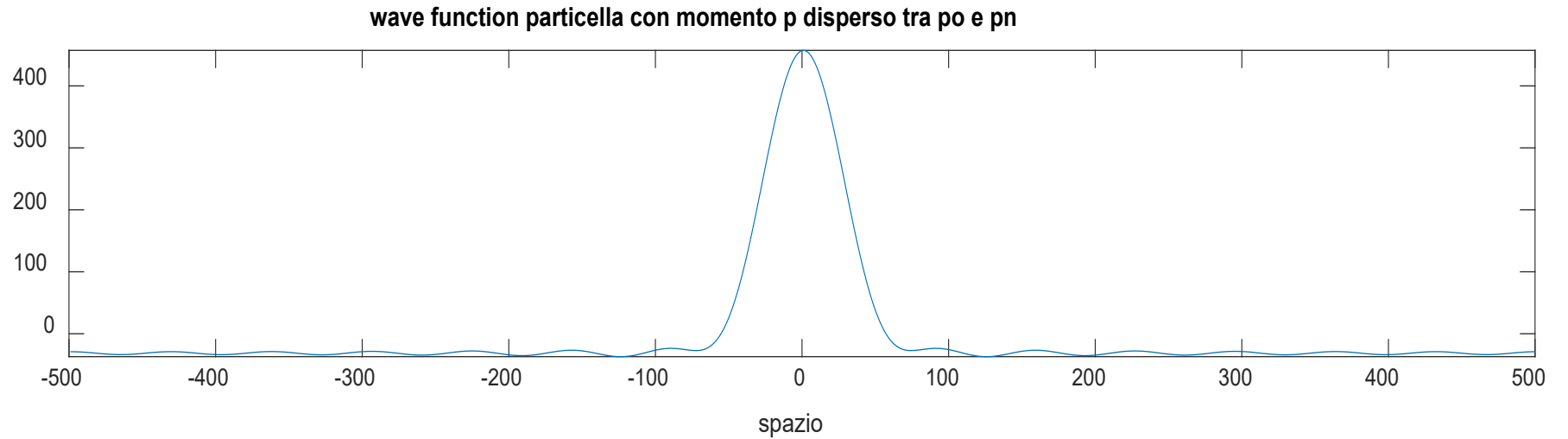
Dispersione del momento



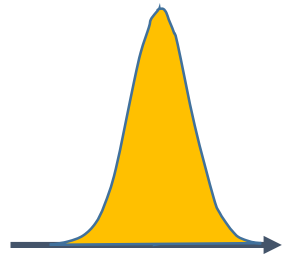
Trasformata di Fourier e principio d'indeterminazione di Heisemberg



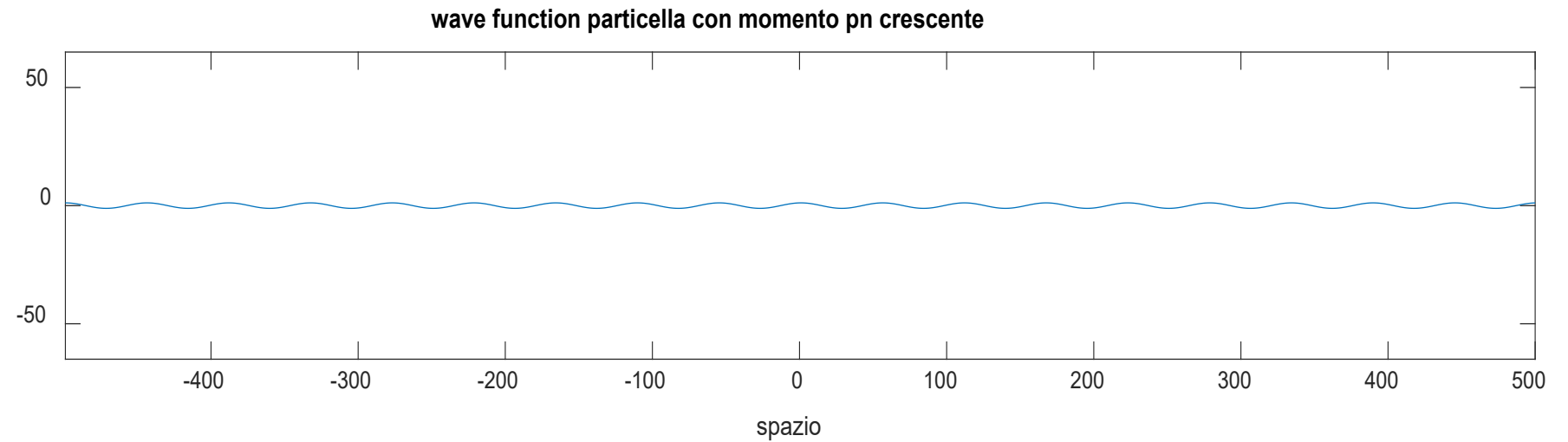
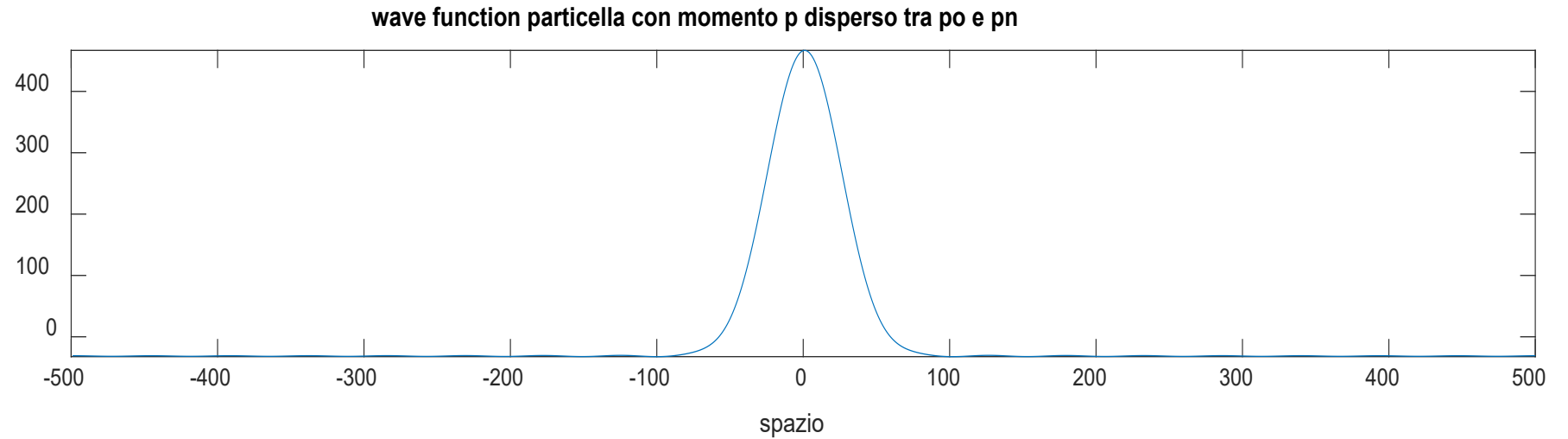
Dispersione del momento



Trasformata di Fourier e principio d'indeterminazione di Heisemberg



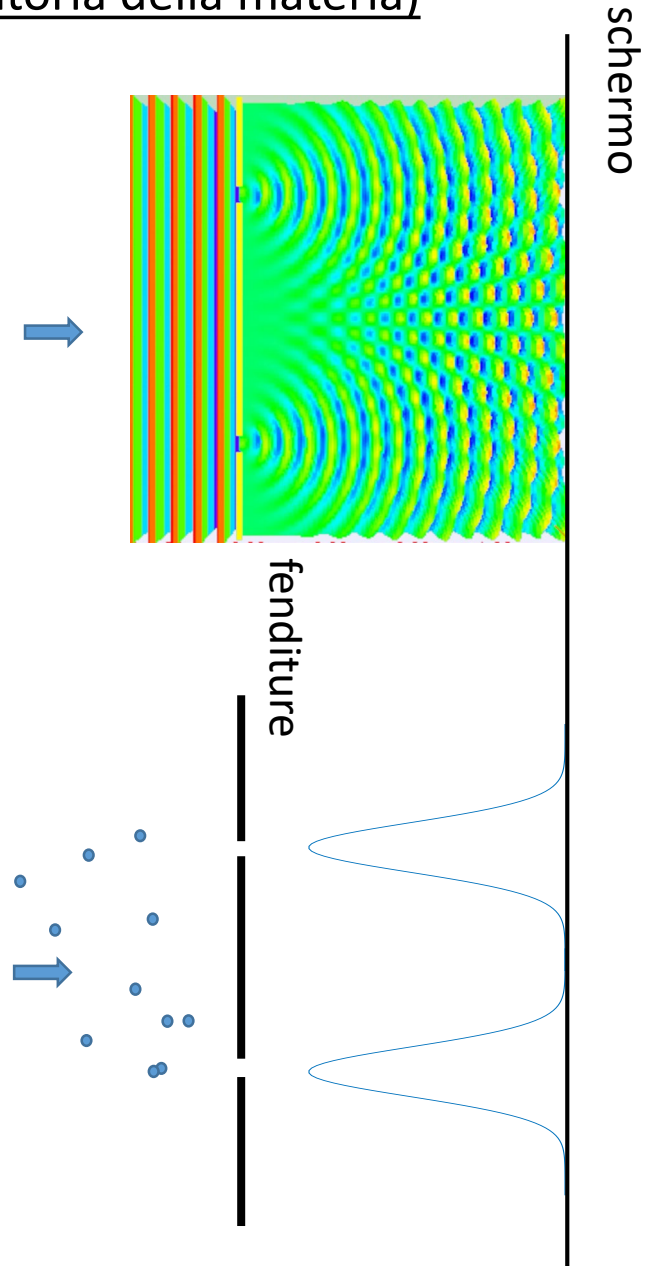
Dispersione del momento



L'esperimento della doppia fenditura (natura ondulatoria della materia)

ONDE

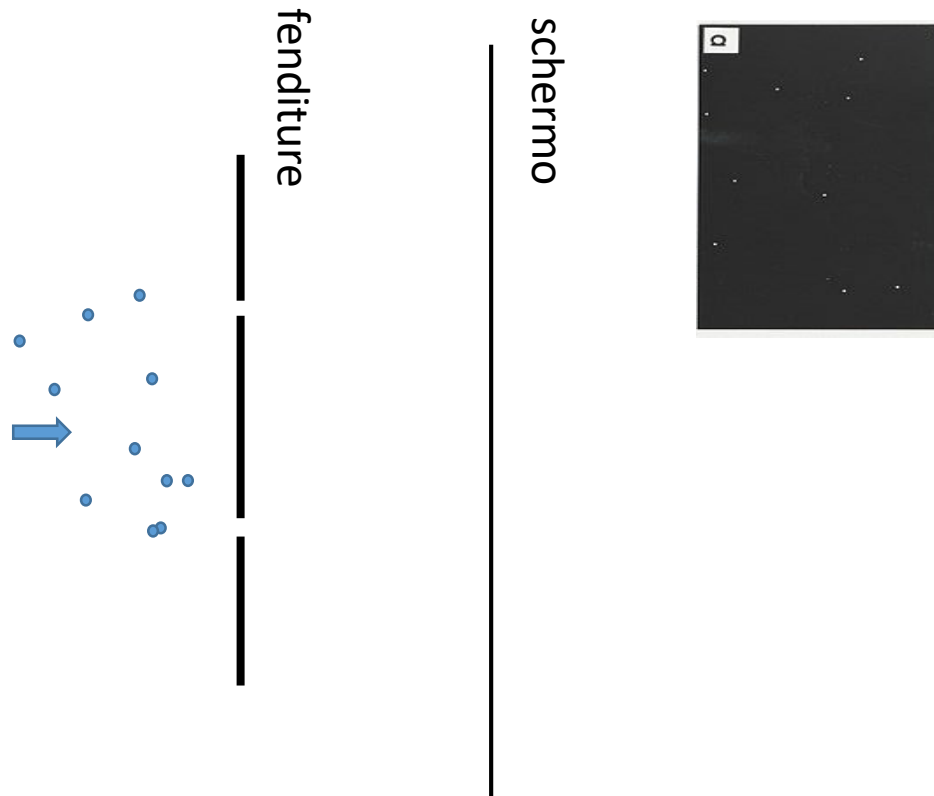
Un'onda passa attraverso una doppia fenditura e sullo schermo posto dietro la doppia fenditura si formano delle frange d'interferenza



PARTICELLE

Una particella passa attraverso una doppia fenditura e sullo schermo posto dietro la doppia si formano 2 zone di accumulo con un massimo in corrispondenza delle posizioni delle fenditure.

L'esperimento della doppia fenditura (natura ondulatoria della materia)



Gli elettroni passano uno alla volta da una delle 2 fenditure e raggiungono lo schermo come particelle.

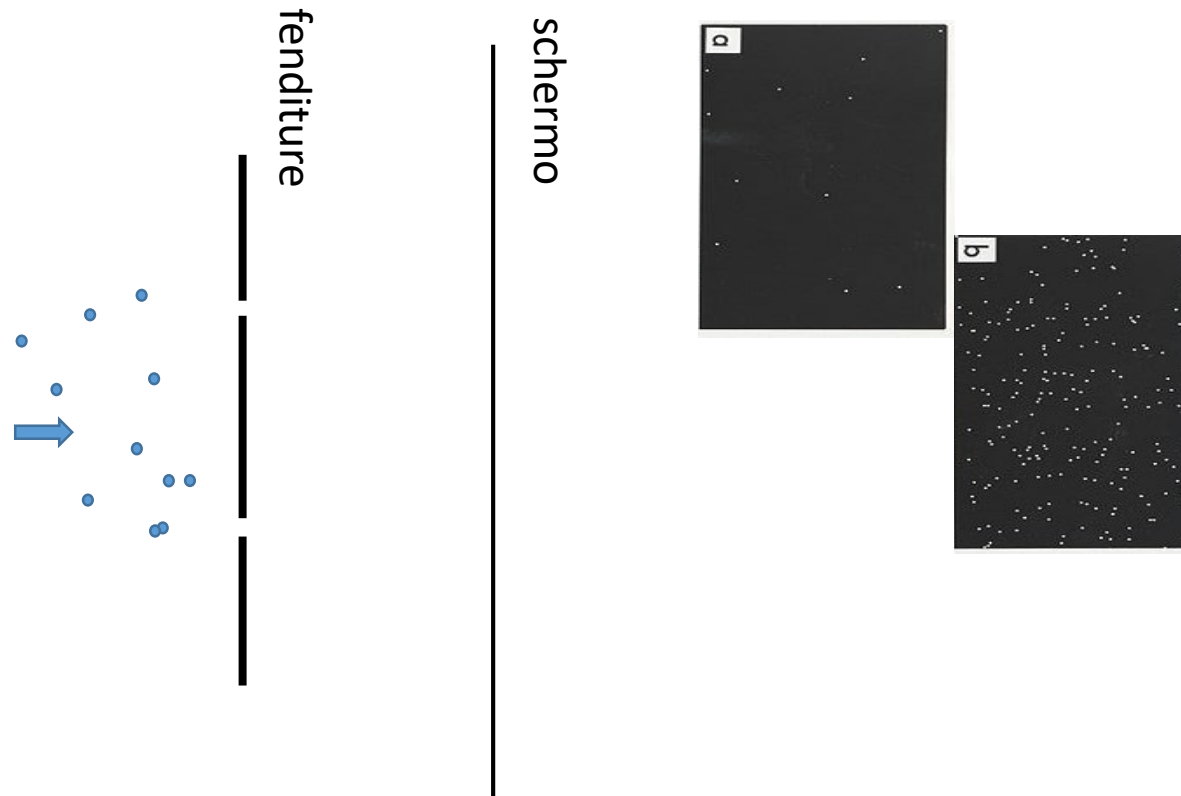
Per avere un'idea precisa della distribuzione degli impatti dei vari elettroni è necessario lanciarne un certo numero ...

Esperimento della doppia fenditura effettuato con elettroni singoli.

Le immagini sono prese dopo l'invio di

(a) 10, (b) 200, (c) 6.000, (d) 40.000, (e) 140.000 elettroni.

L'esperimento della doppia fenditura (natura ondulatoria della materia)



Gli elettroni passano uno alla volta da una delle 2 fenditure e raggiungono lo schermo come particelle

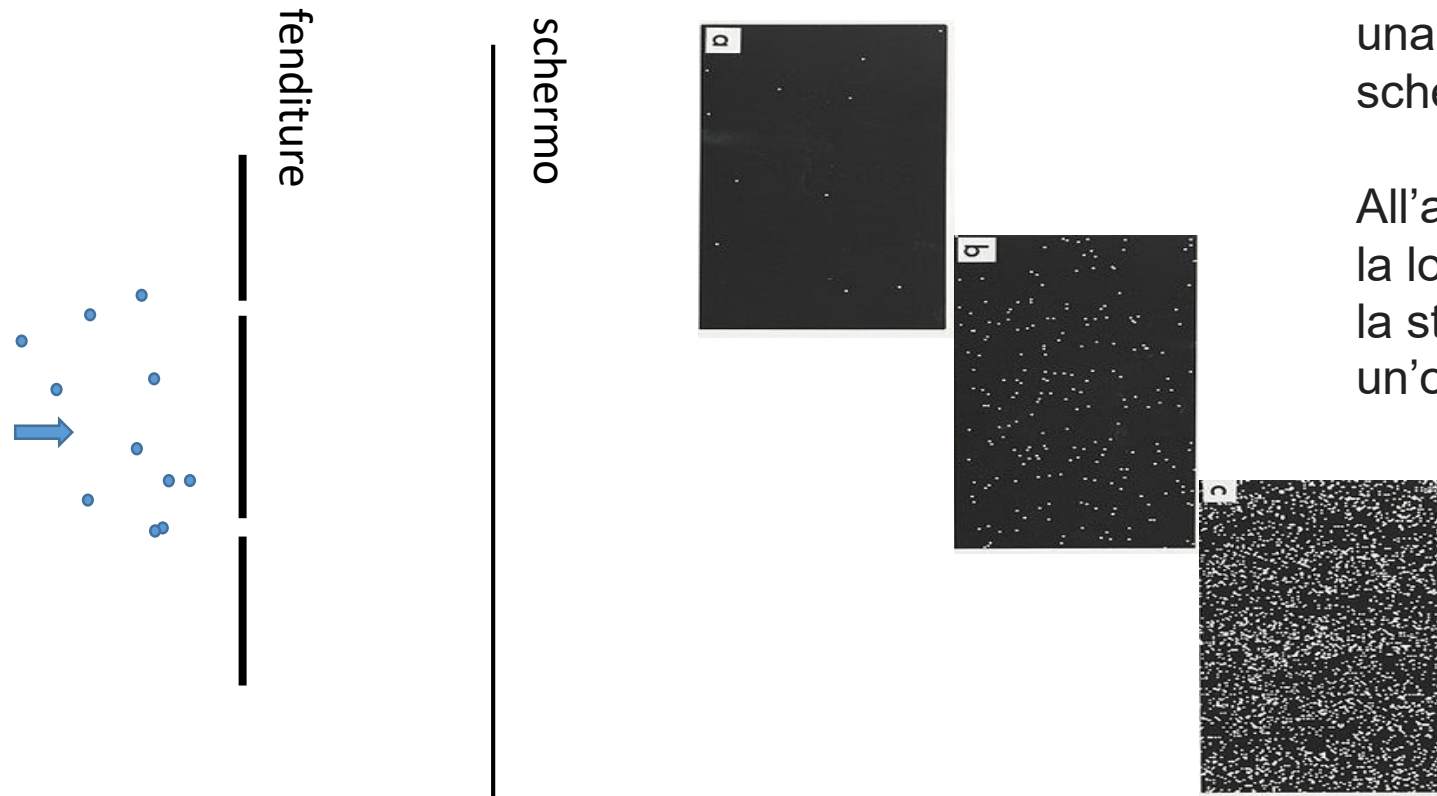
All'aumentare del numero di elettroni la loro distribuzione sullo schermo inizia a rivelarsi ...

Esperimento della doppia fenditura effettuato con elettroni singoli.

Le immagini sono prese dopo l'invio di

(a) 10, (b) 200, (c) 6.000, (d) 40.000, (e) 140.000 elettroni.

L'esperimento della doppia fenditura (natura ondulatoria della materia)



Gli elettroni passano uno alla volta da una delle 2 fenditure e raggiungono lo schermo come particelle

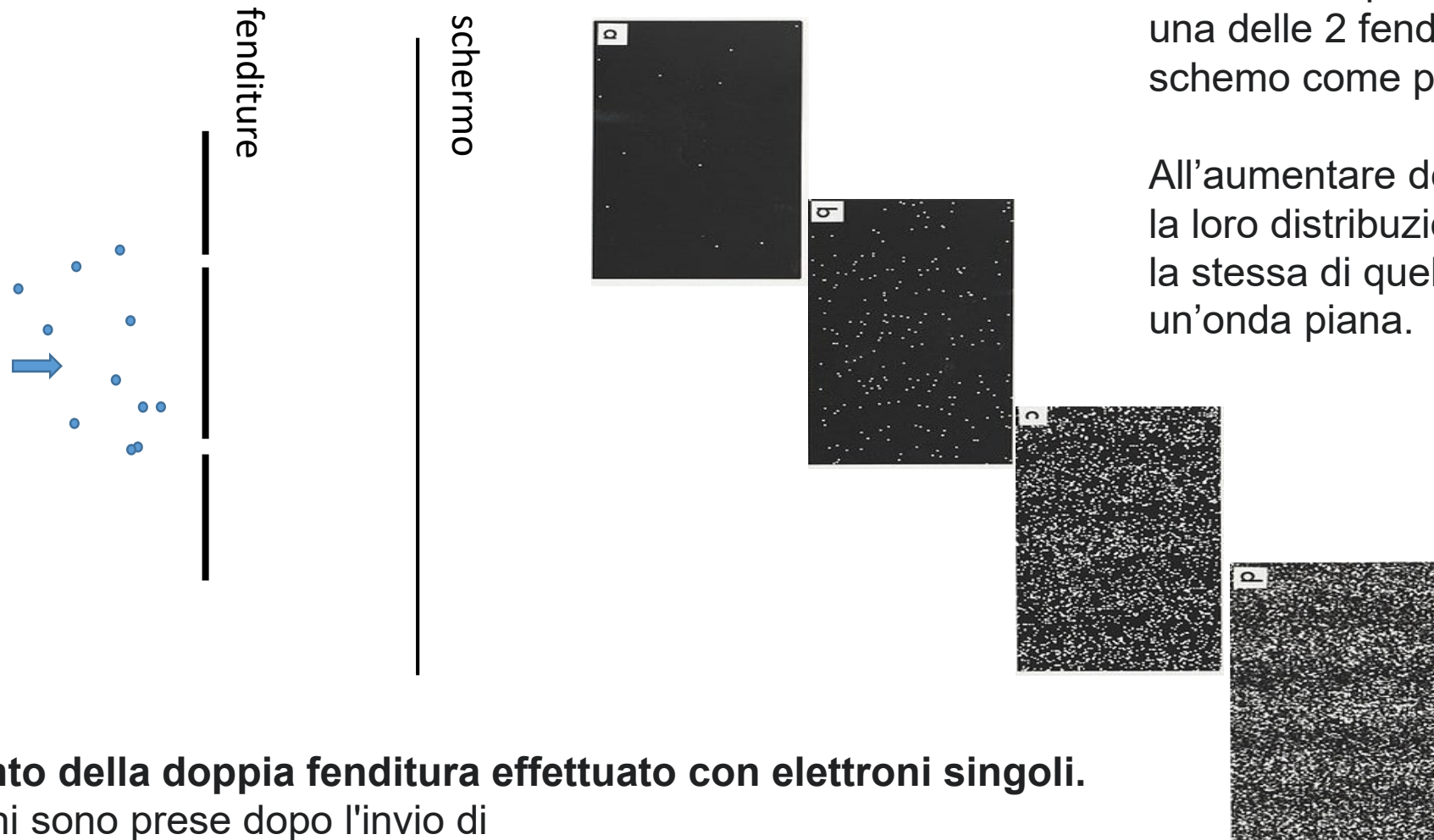
All'aumentare del numero di elettroni la loro distribuzione sullo schermo è la stessa di quella che si avrebbe con un'onda piana.

Esperimento della doppia fenditura effettuato con elettroni singoli.

Le immagini sono prese dopo l'invio di

(a) 10, (b) 200, (c) 6.000, (d) 40.000, (e) 140.000 elettroni.

L'esperimento della doppia fenditura (natura ondulatoria della materia)



Gli elettroni passano uno alla volta da una delle 2 fenditure e raggiungono lo schermo come particelle

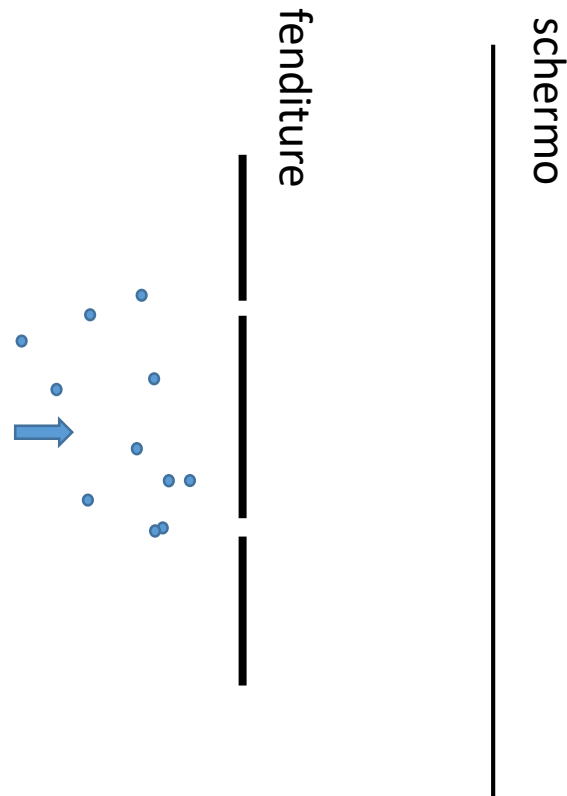
All'aumentare del numero di elettroni la loro distribuzione sullo schermo è la stessa di quella che si avrebbe con un'onda piana.

Esperimento della doppia fenditura effettuato con elettroni singoli.

Le immagini sono prese dopo l'invio di

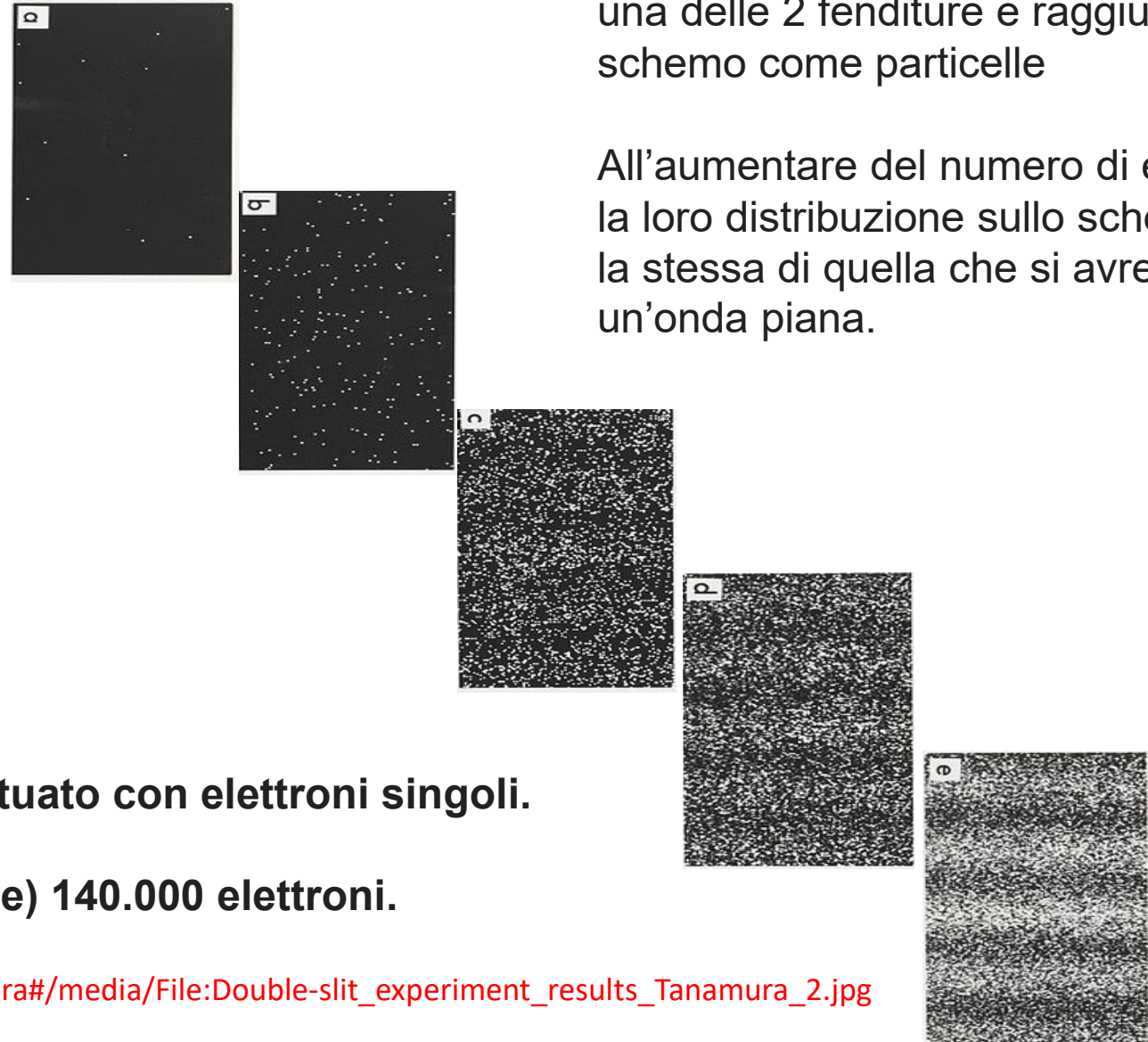
(a) 10, (b) 200, (c) 6.000, (d) 40.000, (e) 140.000 elettroni.

L'esperimento della doppia fenditura (natura ondulatoria della materia)



Gli elettroni passano uno alla volta da una delle 2 fenditure e raggiungono lo schermo come particelle

All'aumentare del numero di elettroni la loro distribuzione sullo schermo è la stessa di quella che si avrebbe con un'onda piana.



Esperimento della doppia fenditura effettuato con elettroni singoli.

Le immagini sono prese dopo l'invio di

(a) 10, (b) 200, (c) 6.000, (d) 40.000, (e) 140.000 elettroni.

Tutta la materia è costituita da onde ... !!??

... ma il mondo macroscopico sembra fatto di particelle solide e confinate nello spazio

Nel mondo macroscopico la funzione d'onda non è più quella delle singole particelle con momento definito, bensì quelle di tutte le particelle intrecciate insieme ognuna con il suo momento.

Torniamo al principio di Heisenberg: il momento di un sistema macroscopico è ampiamente disperso e la sua funzione d'onda «collassa» in un impulso (confinato nello spazio).

LA FUNZIONE DI CORRELAZIONE E LO STACKING

Somma di 16 fotografie riprese con cellulare a mano libera

Allineamento delle immagini e riduzione del «rumore»



Rumore: segnale noto solo in *probabilità* i cui valori non sono deterministicamente noti (come nel caso di una fotocamera digitale).

Tecnica base per la riduzione del rumore: somma di tante immagini indipendenti dello stesso soggetto.



Nella somma di N immagini indipendenti dello stesso soggetto

$$I_n(x, y) = s_n(x, y) + r_n(x, y)$$

Il segnale $s_n(x, y)$ si «*somma in tensione*» e la sua energia vale

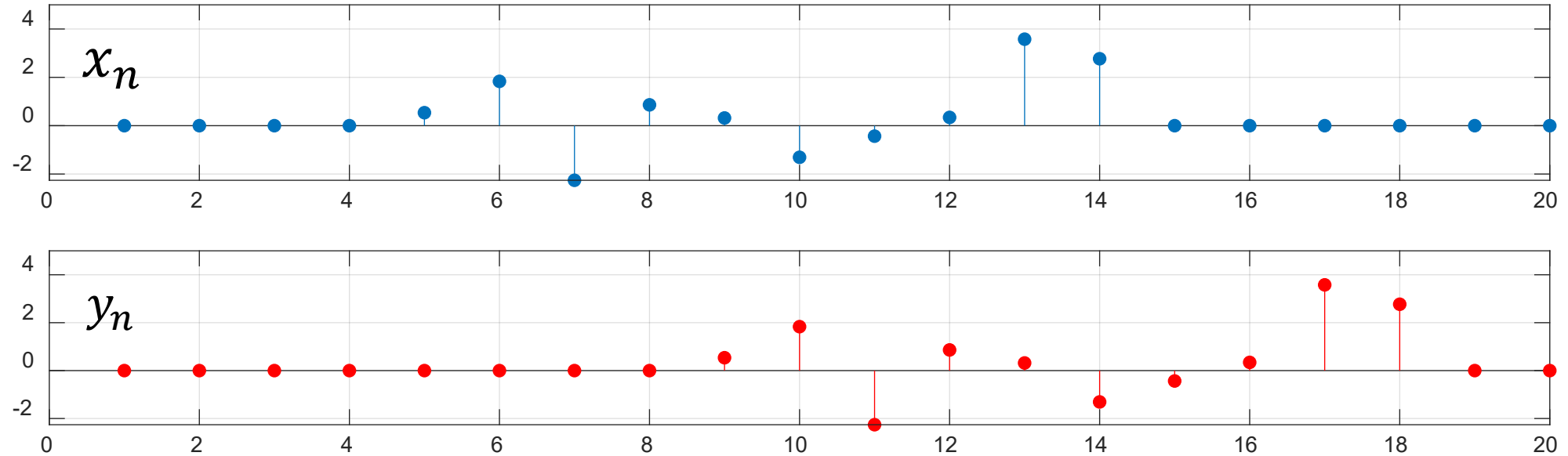
$$\left(\sum_{n=1}^N s_n(x, y) \right)^2$$

Il rumore $r_n(x, y)$ si «*somma in potenza*» e la sua energia vale

$$\sum_{n=1}^N (r_n(x, y))^2$$

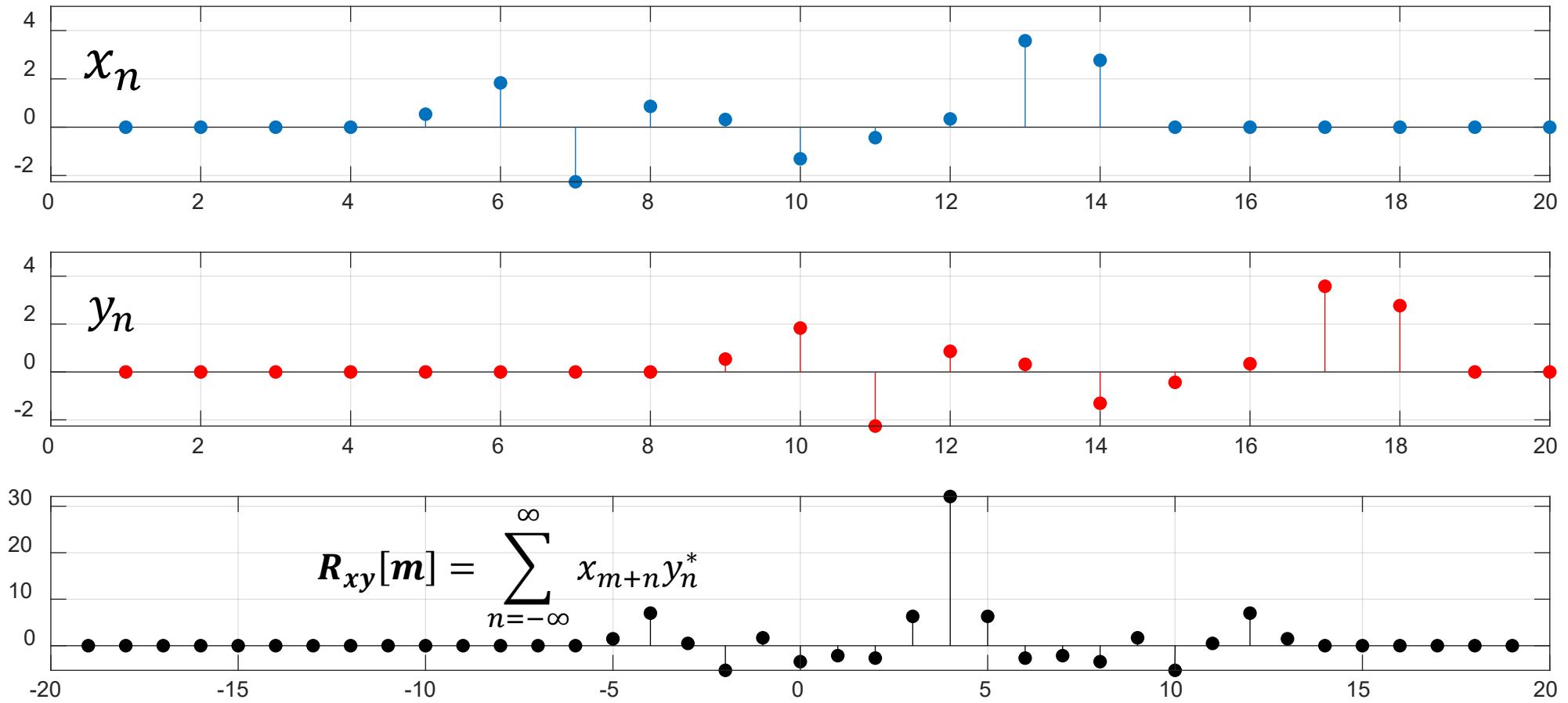


La cross-correlazione $R_{xy}[m]$ di 2 segnali x_n e y_n è una funzione che presenta un massimo in corrispondenza dello spostamento relativo dei 2 segnali



$$R_{xy}[m] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{m+n} y_n^*$$

La cross-correlazione $R_{xy}[m]$ di 2 segnali x_n e y_n è una funzione che presenta un massimo in corrispondenza dello spostamento relativo dei 2 segnali







POLITECNICO
MILANO 1863



POLITECNICO
MILANO 1863

L'esempio dello «stacking» nella fotografia astronomica

Somma di 11 fotografie riprese con macchina fotografica
su cavalletto fisso

Allineamento delle immagini e riduzione del «rumore»

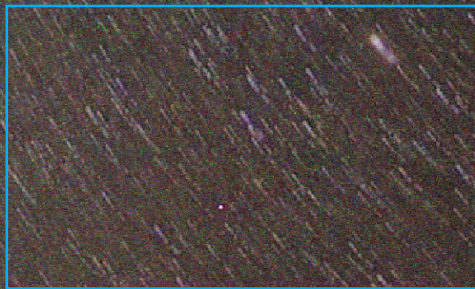
Singola immagine fotografata con grande apertura e tempi brevi



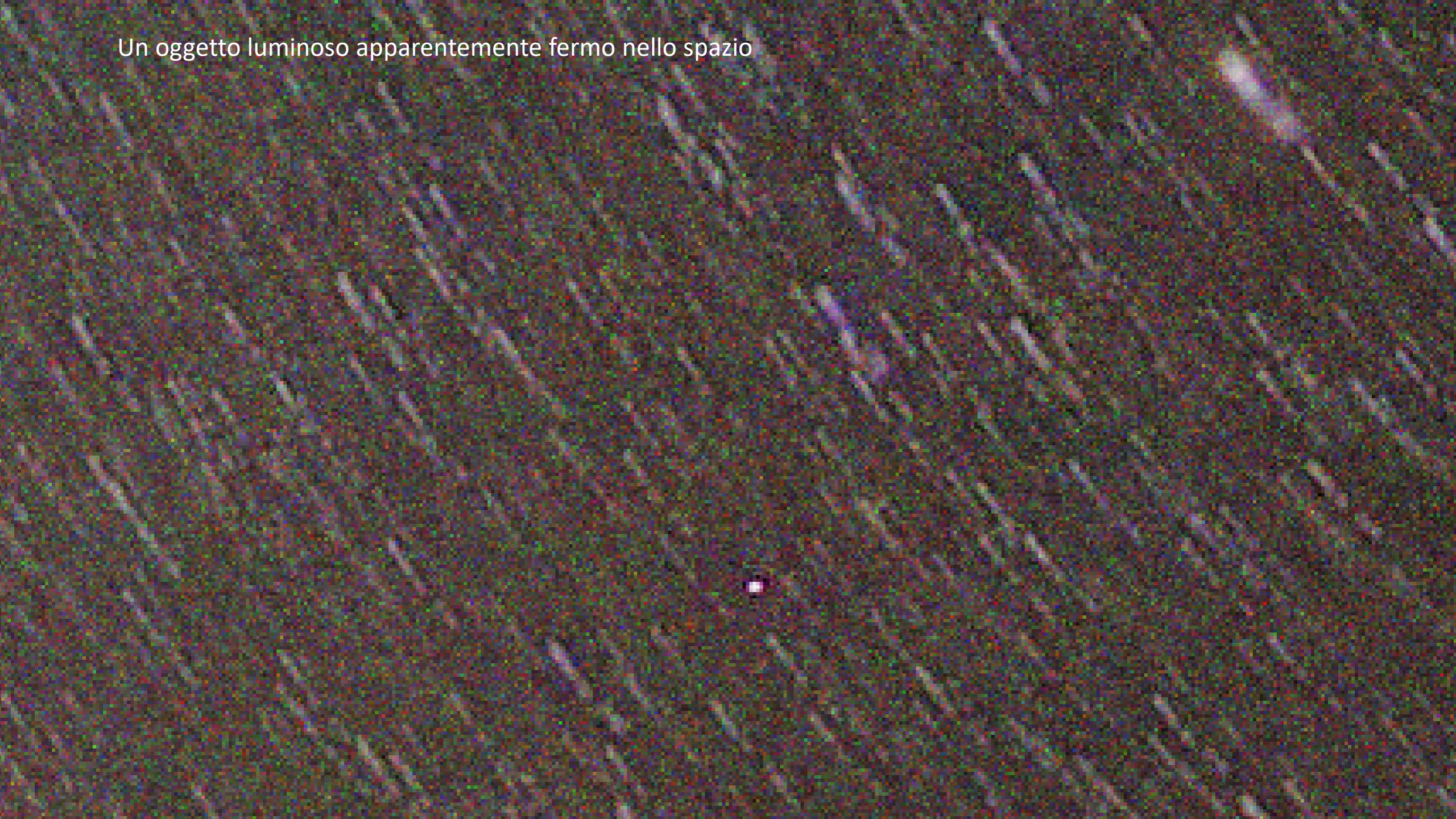
Somma di 11 immagini riprese a distanza di circa 1 minuto una dall'altra



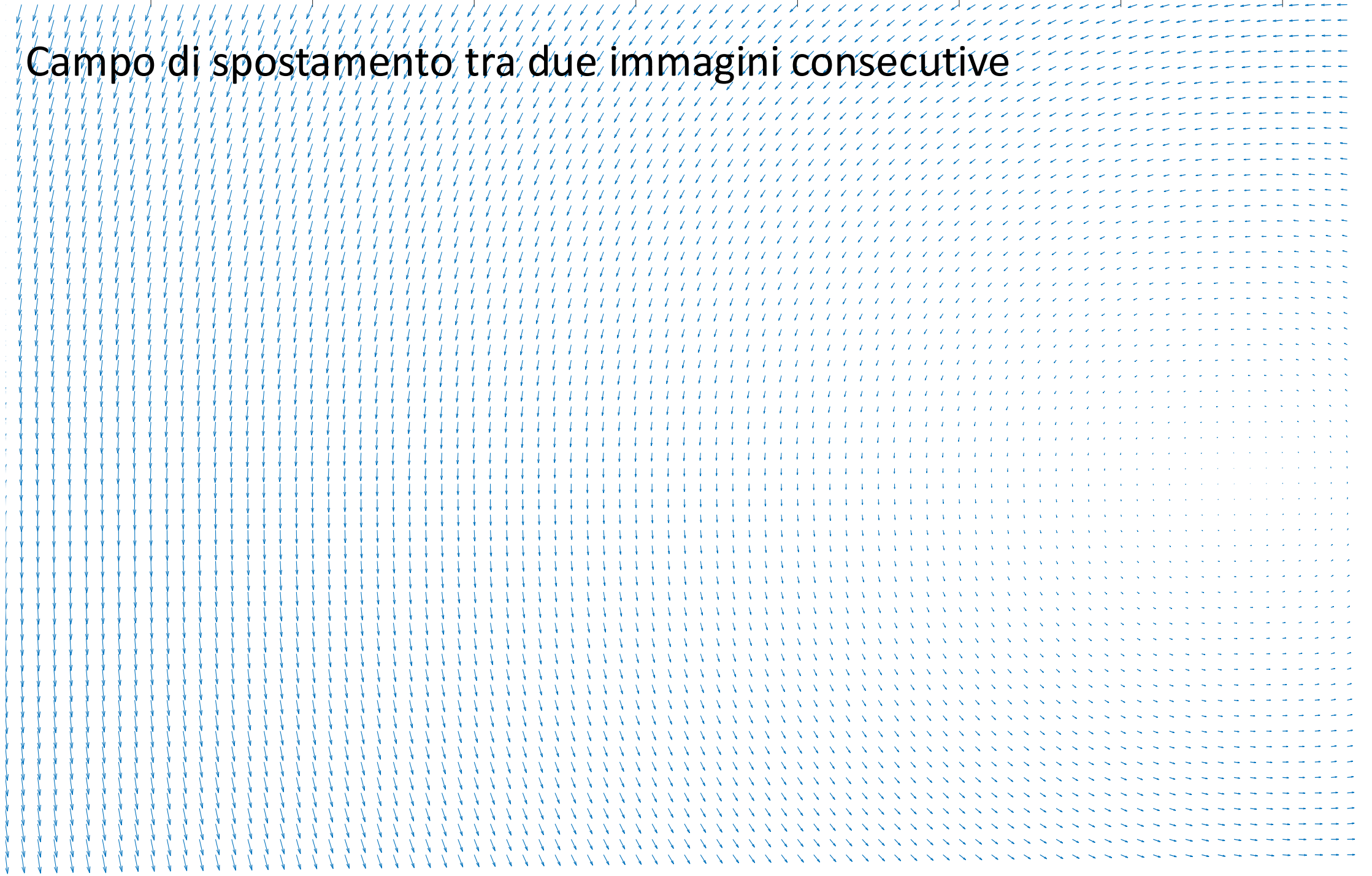
Lo spostamento varia nello spazio



Un oggetto luminoso apparentemente fermo nello spazio



Campo di spostamento tra due immagini consecutive



Campo di spostamento tra due immagini consecutive



Singola immagine fotografata con grande apertura e tempi brevi



Somma di 11 immagini dopo aver compensato gli spostamenti relativi: «STACKING»



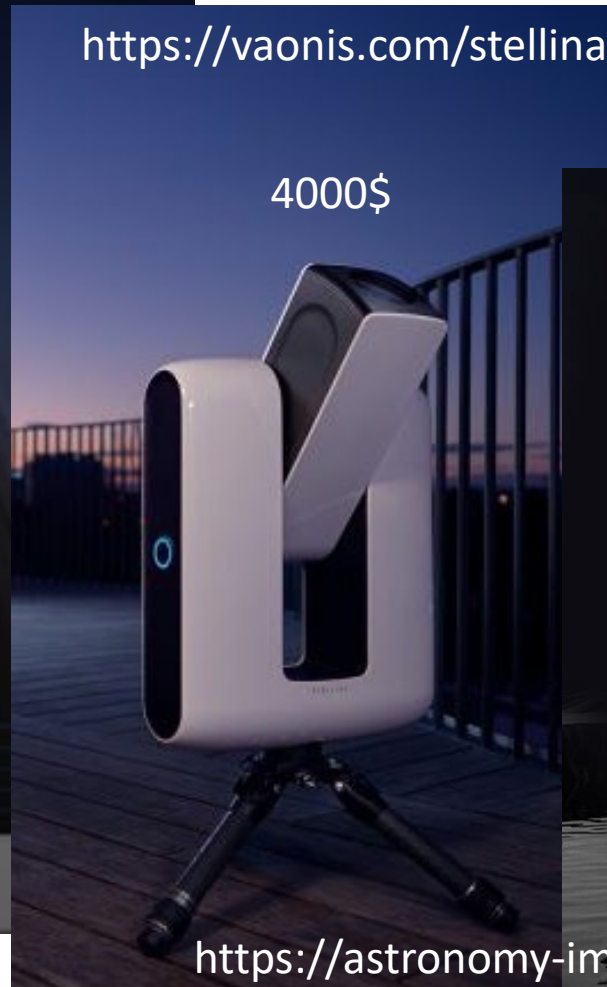
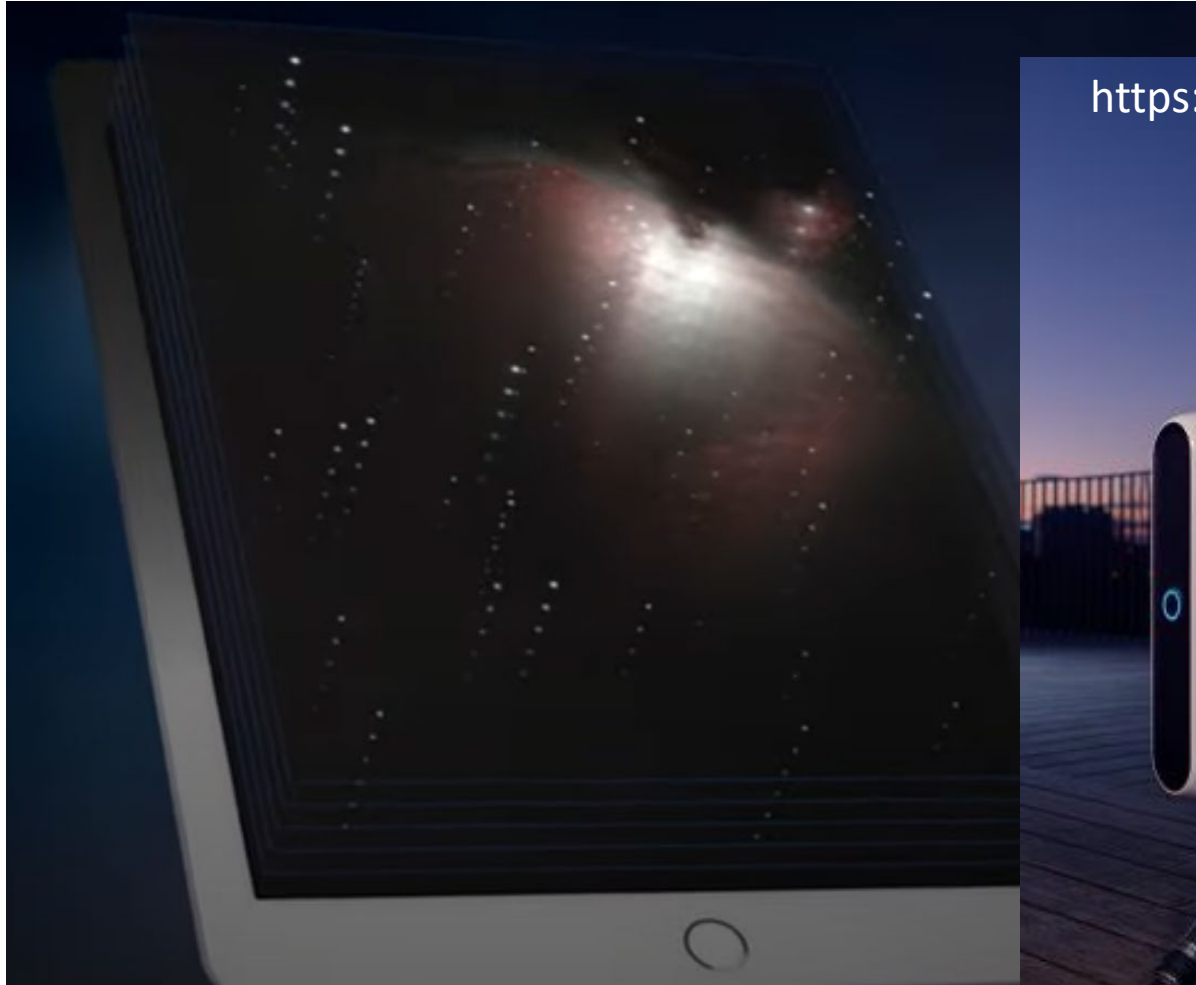
L'esempio dello «stacking» nella fotografia astronomica

Somma di N fotografie riprese con macchina fotografica
su cavalletto con compensazione del moto terrestre

Allineamento delle immagini e riduzione del «rumore»

L'esempio dello «stacking» nella fotografia astronomica

Somma di N fotografie riprese con fotocamera su cavalletto con compensazione del moto terrestre



<https://astronomy-imaging-camera.com/product/zwo-seestar/>



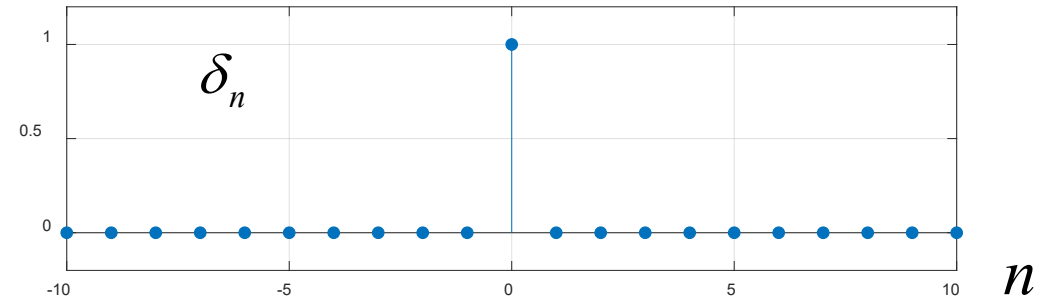
The Spiral M83

SHOT WITH STELLINA

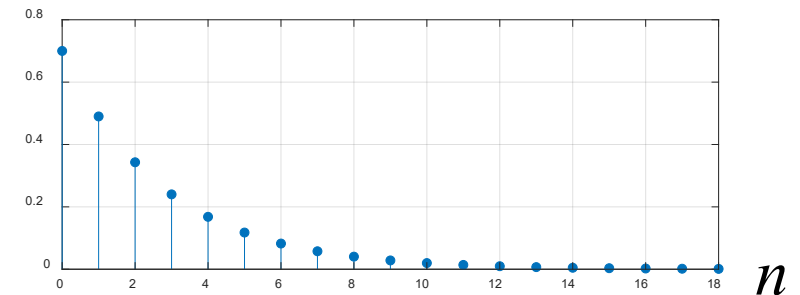
LA CONVOLUZIONE PER MODIFICARE UN SEGNALE

La convoluzione (simbolo $*$) tra un segnale x e la risposta all'impulso h di un sistema Lineare Tempo-Invariante serve a modificare alcune caratteristiche del segnale che diventa $y = x * h$

Impulse $\delta_n = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$



Impulse response



Convolution

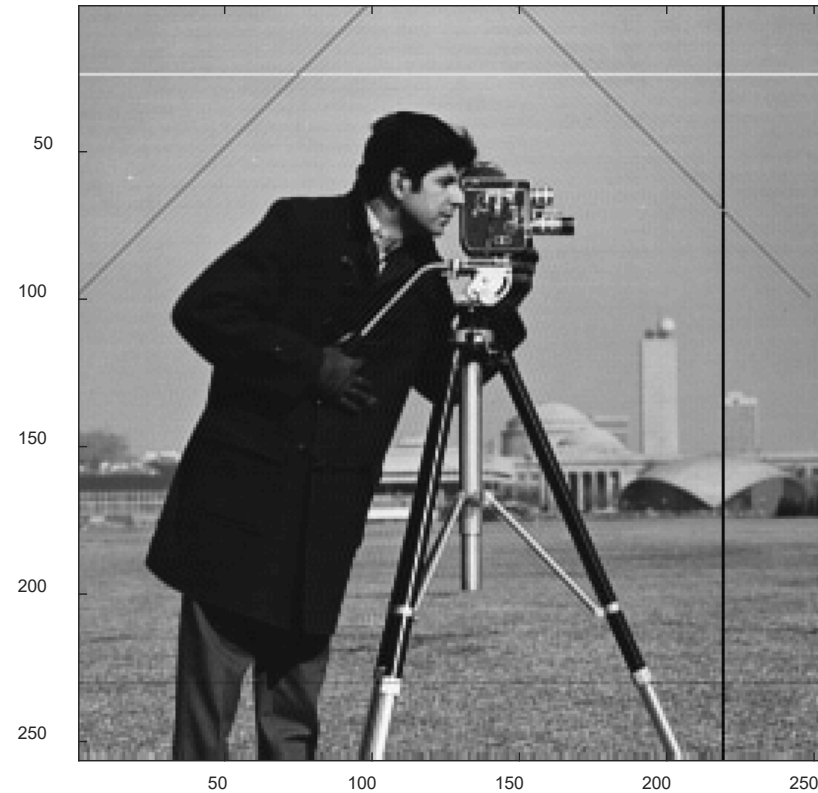
$$y_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \cdot h_{n-k}$$



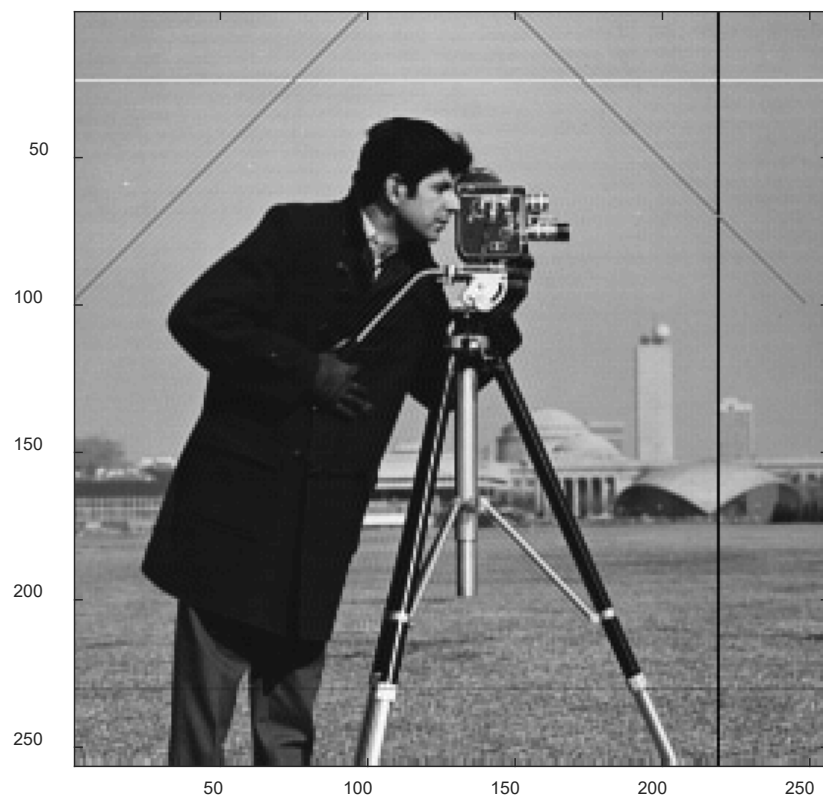
$$y_n = x_n * h_n$$

L'esempio dell'eliminazione di dettagli nelle fotografie

Immagine originale



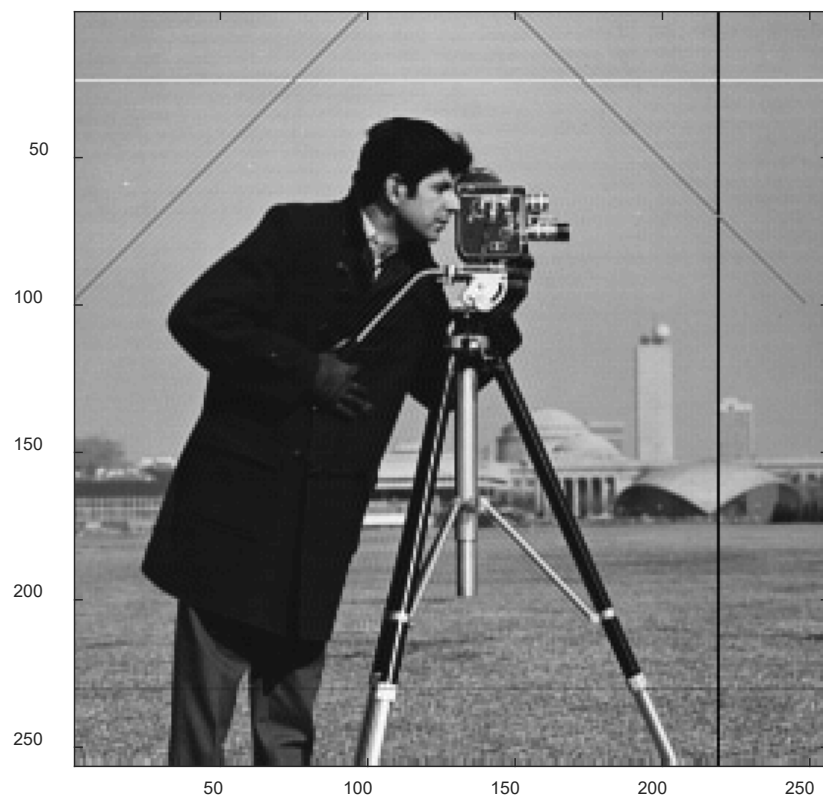
Eliminazione dettagli con estensione orizzontale



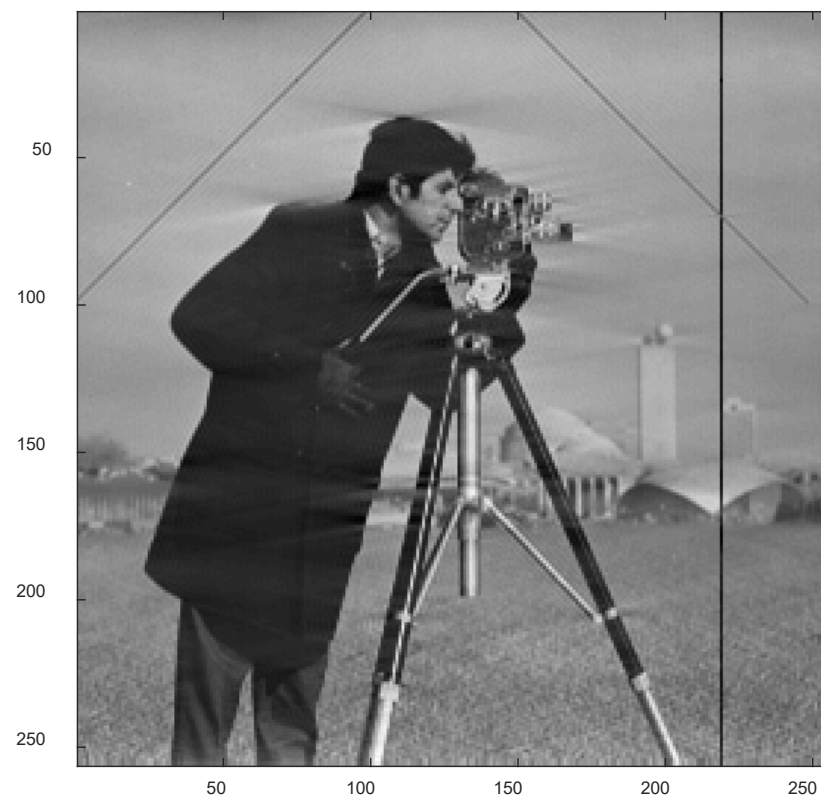
$$y = x * h1$$



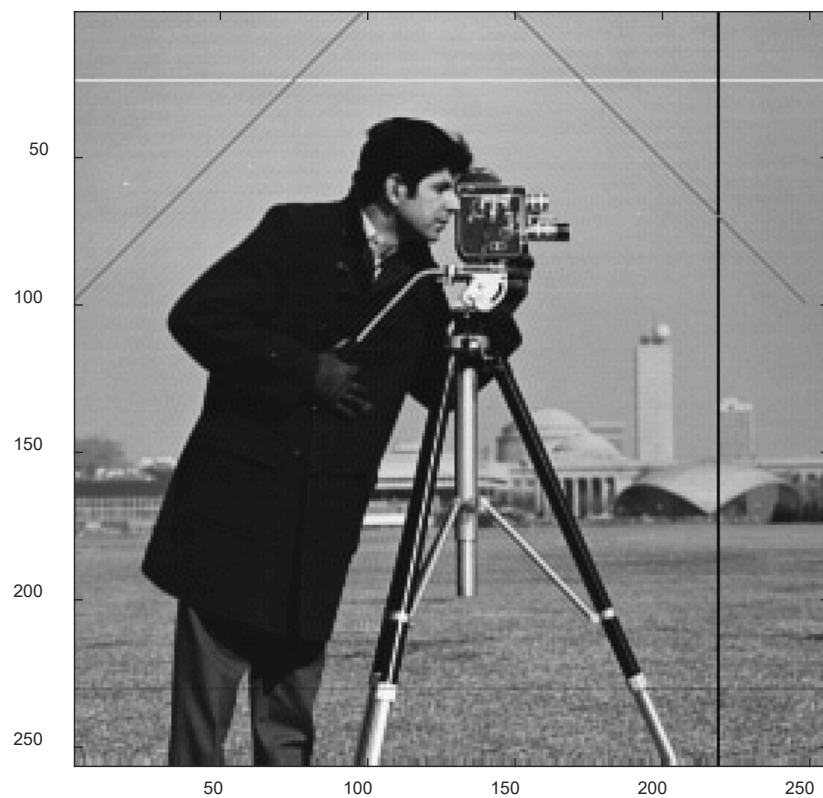
Eliminazione dettagli con estensione orizzontale



$$y = x * h1$$



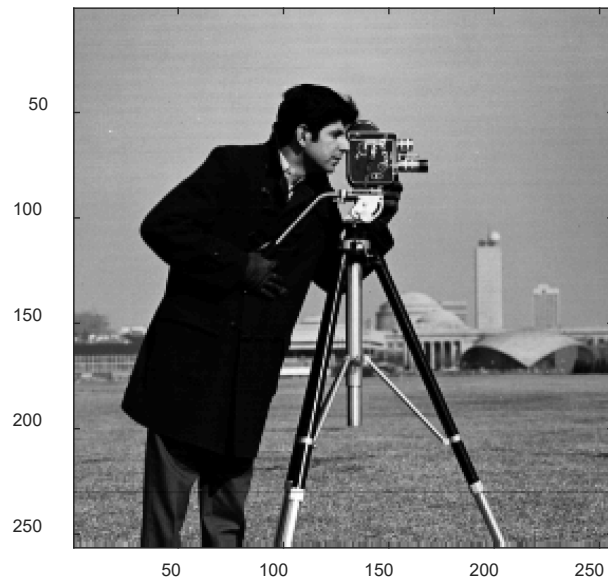
Eliminazione dettagli con estensione verticale



$$y = x * h2$$

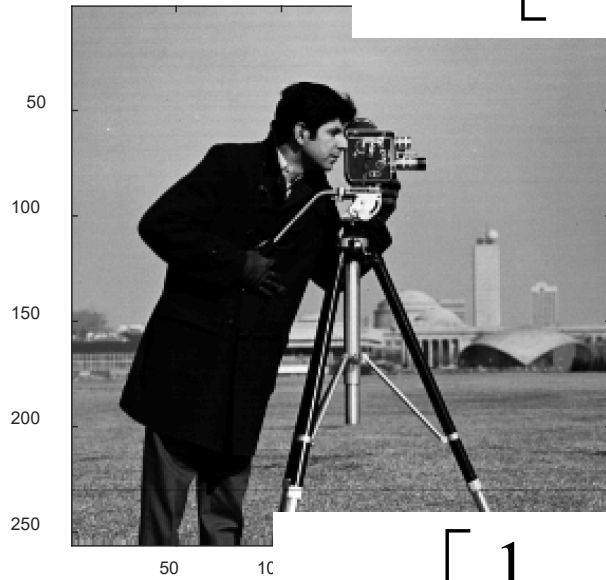


Generazione di un «filtro passa-alto» nel dominio spaziale e generazione dei contorni

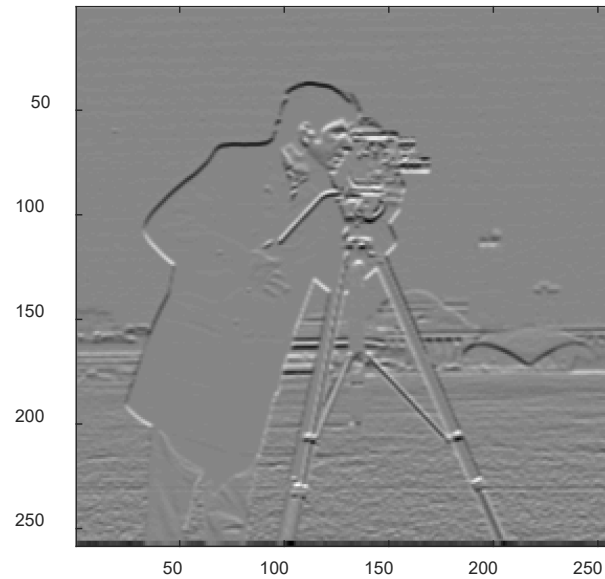
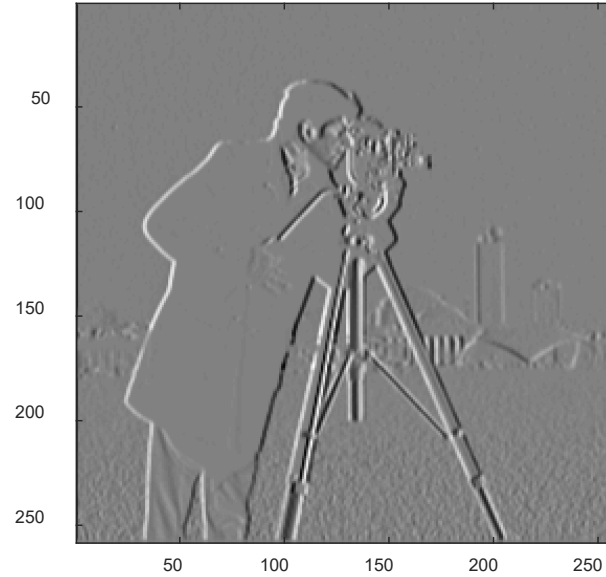


Generazione di un «filtro passa-alto» nel dominio spaziale e generazione dei contorni

$$K_x = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

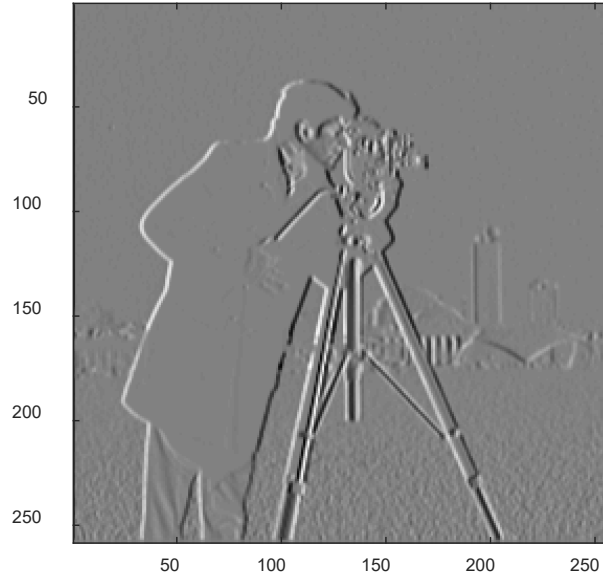


$$K_y = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$



Generazione di un «filtro passa-alto» nel dominio spaziale e generazione dei contorni

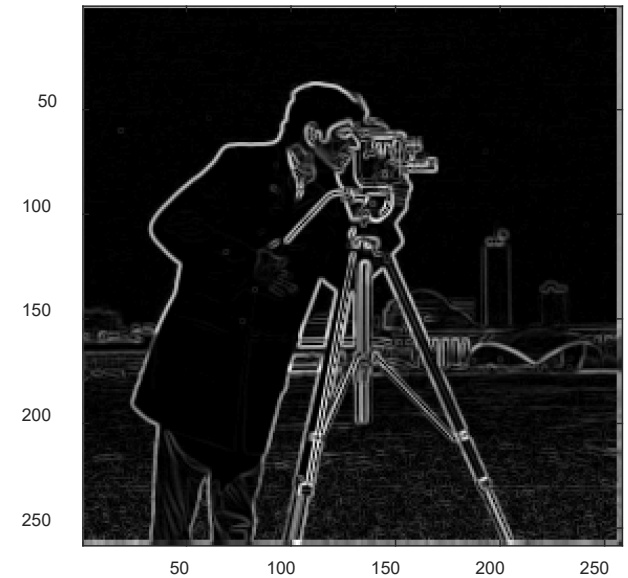
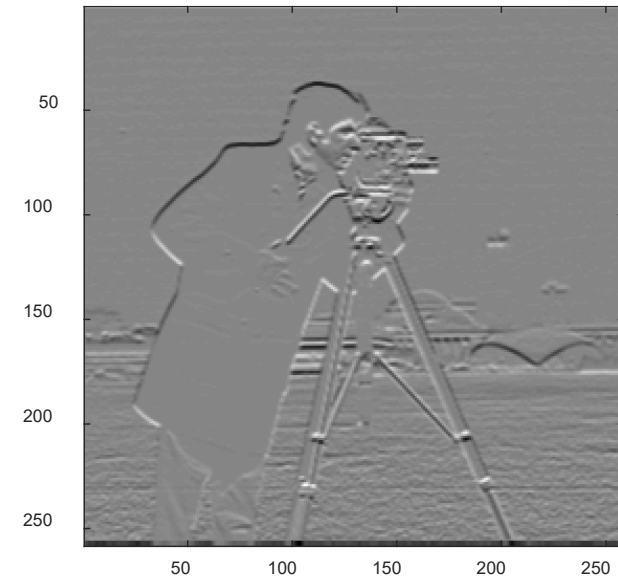
$$K_x = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



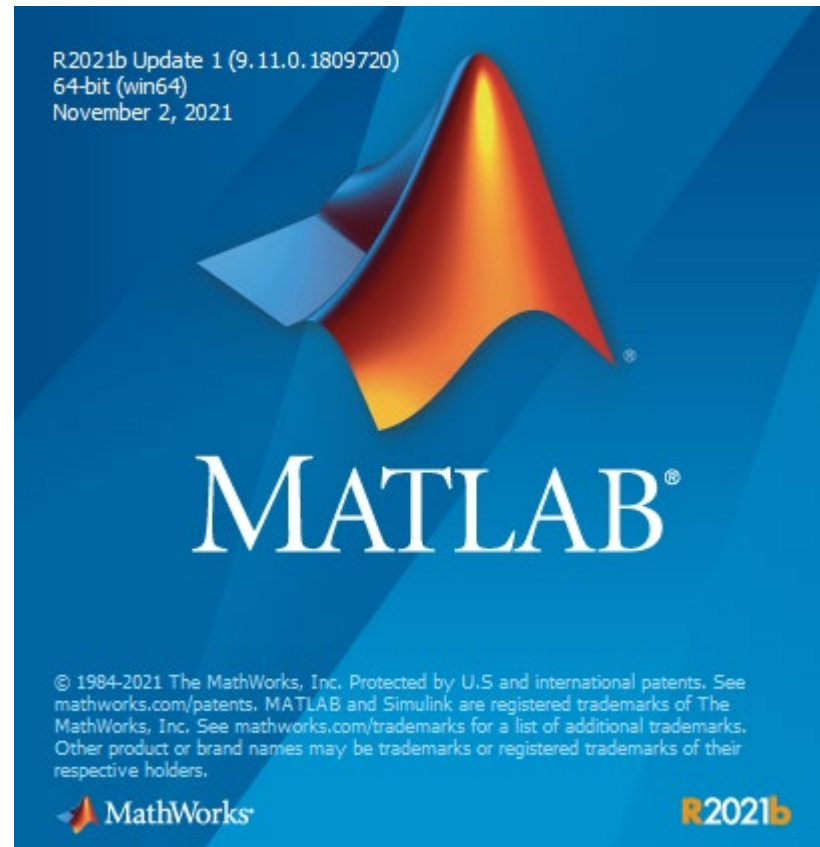
$$|G(x, y)| = \sqrt{I_x^2 + I_y^2}$$



$$K_y = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

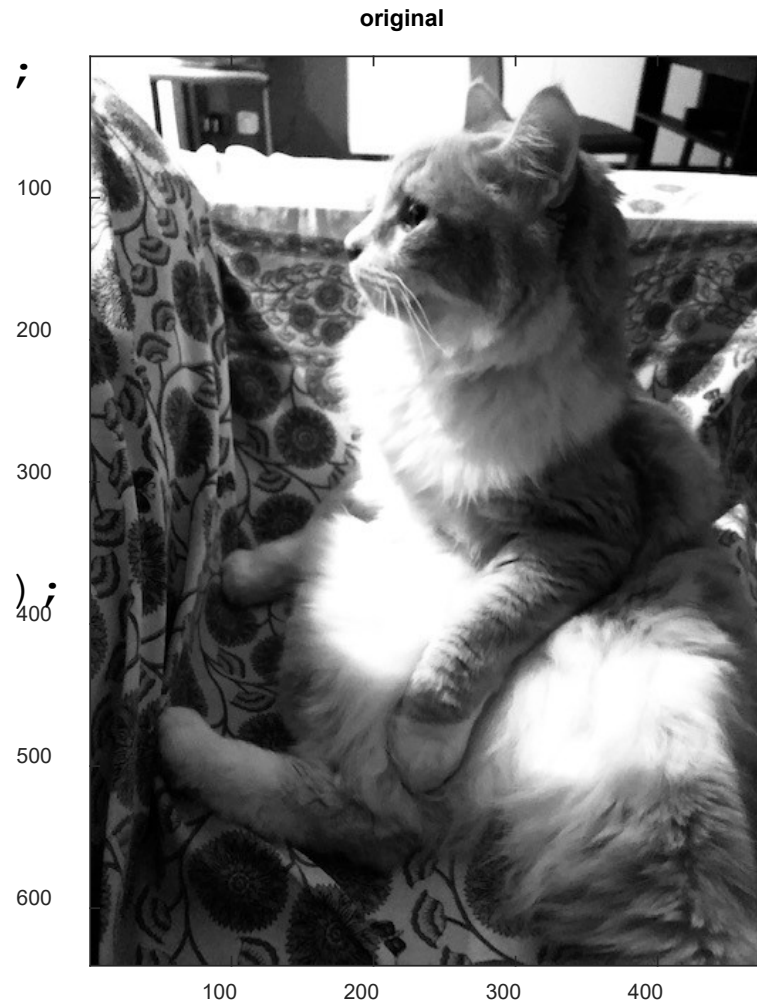


Usare Matlab per sperimentare e capire con la pratica quanto visto in teoria

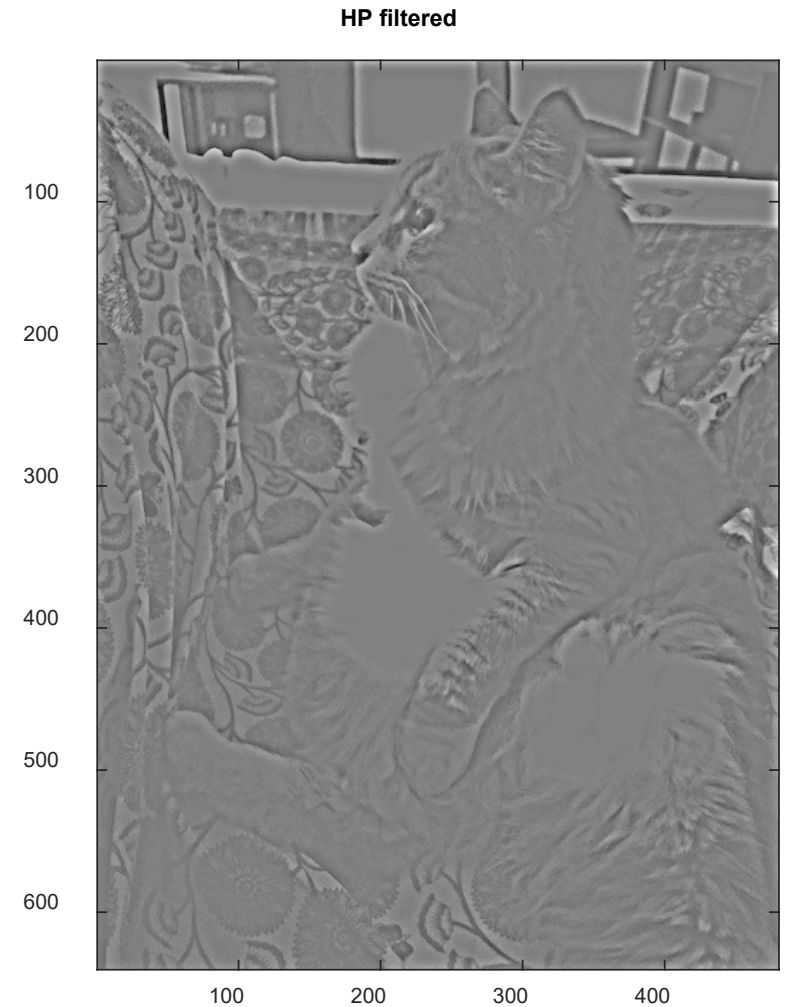



```
%-----  
% Let us apply the 2D high-pass filter to the original image  
%-----
```

```
IMAGE=imread('gatto.jpg');  
X=IMAGE(:,:,1);  
figure(1)  
imagesc(X)  
gray  
axis('image')  
title('original')
```



```
XHP=conv2(X,hHP_2D,'same');  
figure(2)  
imagesc(XHP)  
colormap gray  
axis('image')  
title('HP filtered')
```



Studieremo solo segnali «fisicamente realizzabili» per i quali non esistono restrizioni all'applicabilità di molte operazioni matematiche.

Ad esempio per noi sarà sempre lecito derivare sotto il segno d'integrale o, come diceva il geniale e simpatico fisico Richard Feynman sulla trasformata di Fourier:



In what circumstances can a curve be represented as a sum of a lot of cosines?

Answer: In all ordinary circumstances, except for certain cases the mathematicians can dream up. Of course, the curve must have only one value at a given point, and it must not be a crazy curve which jumps an infinite number of times in an infinitesimal distance, or something like that. But aside from such restrictions any reasonable curve (one that a singer is going to be able to make by shaking her vocal cords) can always be compounded by adding cosine waves together

Passeremo dal continuo al discreto e viceversa per semplificare la trattazione teorica.

Estenderemo poi i risultati da un dominio all'altro.

Ad esempio ricavare l'espressione della convoluzione è molto più semplice per i segnali discreti, mentre l'introduzione della Trasformata di Fourier è più semplice per i segnali continui.

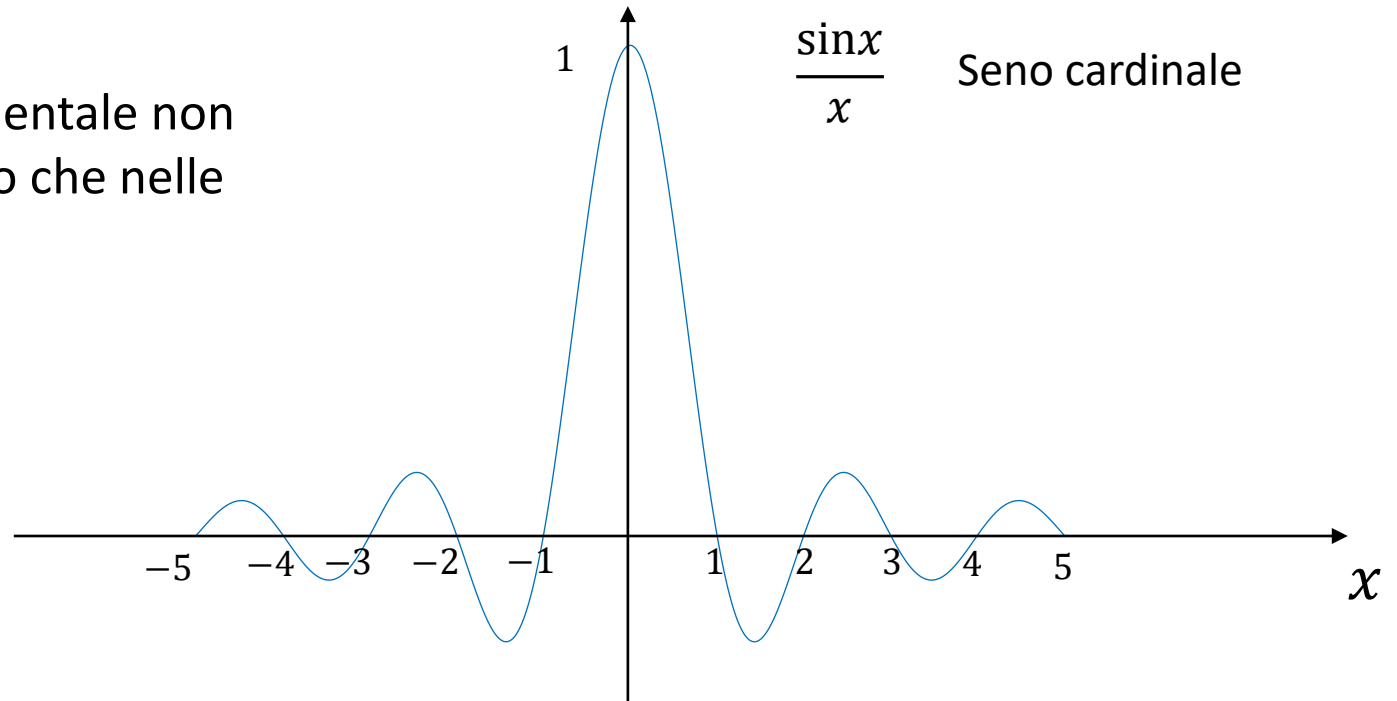
IL CALCOLO

I passaggi matematici sono tenuti in giusta considerazione quando servono a comprendere meglio il fenomeno che si sta analizzando.

Peraltro, lo svolgimento di calcoli complicati che non aggiungono nulla alla comprensione del fenomeno viene trascurato utilizzando direttamente il risultato ... **Ad esempio**

Il calcolo del seguente integrale (fondamentale non solo per l'analisi dei segnali sia nel tempo che nelle frequenze) non è affatto banale

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$



Un modo standard per calcolare

$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ è usare la funzione

ChatGPT 5.1 ✓

$$F(a) = \int_0^{+\infty} e^{-ax} \frac{\sin x}{x} dx, \quad a > 0.$$

Osserva che per ogni $a > 0$ l'integrale converge assolutamente.

Deriviamo rispetto ad a :

$$F'(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial a} \left(e^{-ax} \frac{\sin x}{x} \right) dx = \int_0^{+\infty} -x e^{-ax} \frac{\sin x}{x} dx = - \int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin x dx.$$

Ma l'integrale $\int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin x dx$ è un classico integrale di Laplace:

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin x dx = \frac{1}{1 + a^2}, \quad a > 0.$$

Quindi

$$F'(a) = -\frac{1}{1 + a^2}.$$

Integrando rispetto ad a :

$$F(a) = -\arctan(a) + C.$$

Ora guardiamo il limite per $a \rightarrow +\infty$.

Quando a è molto grande, e^{-ax} fa decadere tutto rapidissimamente, quindi

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} F(a) = 0.$$

D'altra parte:

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} F(a) = \lim_{a \rightarrow +\infty} (-\arctan(a) + C) = -\frac{\pi}{2} + C.$$

Imponendo $0 = -\pi/2 + C$, otteniamo $C = \pi/2$.

Quindi

$$F(a) = \frac{\pi}{2} - \arctan(a).$$

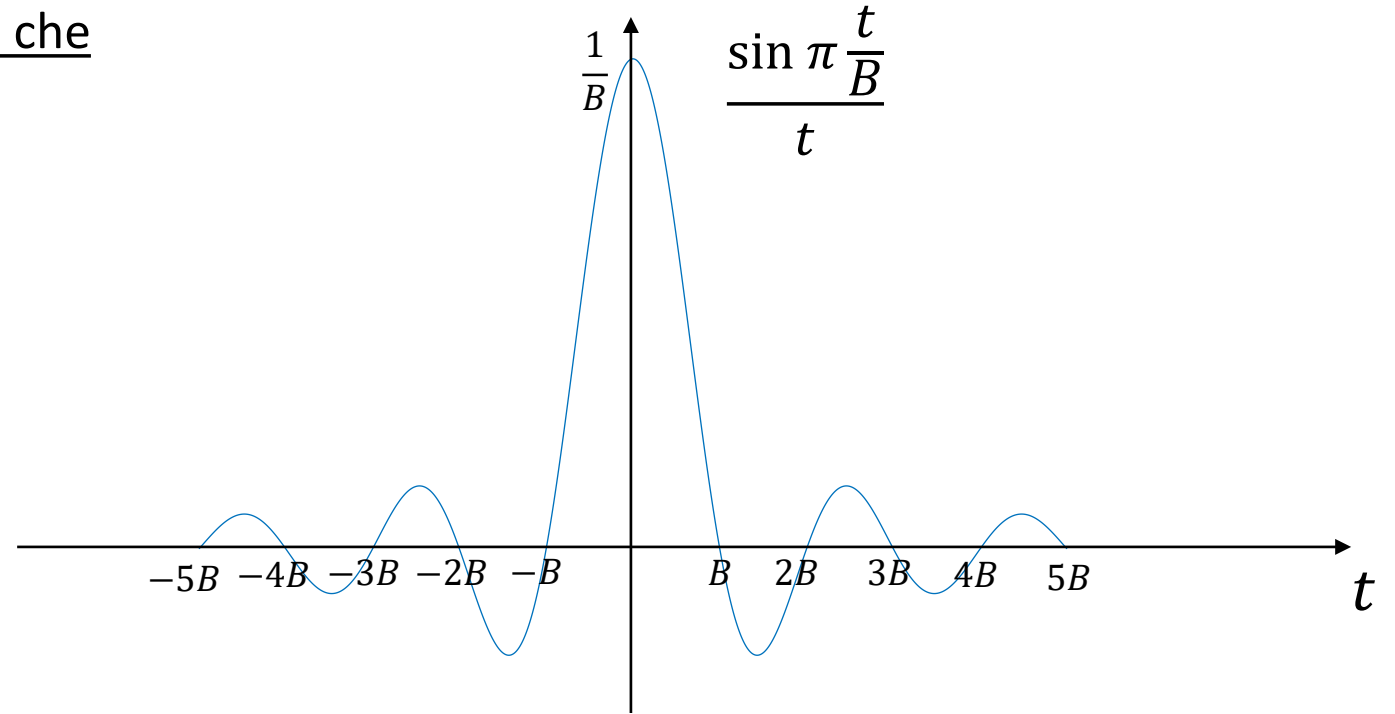
Adesso mandiamo $a \rightarrow 0^+$:

$$F(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2} - \arctan(0) = \frac{\pi}{2}.$$

Al contrario sarà interessante dimostrare che

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \pi \frac{t}{B}}{t} dt$$

è indipendente da B :



Infatti, ponendo $\tau = \frac{t}{B}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \pi \frac{t}{B}}{t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \pi \tau}{B\tau} B d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \sin \frac{\pi \tau}{\tau} d\tau = 1$$

Le tre regole d'oro per il docente e lo studente (suggerite da Feynman):

- Essere in grado di spiegare un concetto a un bambino di terza elementare.
- Non possedere lacune nella conoscenza del concetto.
- Semplificare l'esposizione del concetto e saperla rendere interessante e scorrevole.