POLITECNICO DI MILANO

Probabilità e Processi casuali

Laboratorio 5 – Segnali per le Telecomunicazioni

Prof. Prati Claudio Maria

Autore: Federico Borra
Politecnico di Milano, DEIB
Email: federico.borra@polimi.it

Aprile’17, Ultima revisione: 28/05/17

Dall’istogramma alla densità di probabilità

- Variabili discrete
  - Istogramma= grafico delle frequenze relative
- Variabili continue
  - Istogramma= grafico delle frequenze relative ottenuto dopo una discretizzazione
- Attenzione: i valori dell’istogramma per le variabili casuali continue, una volta “discretizzate”, dipendono dalla dimensione dell’intervallino scelto: più è piccolo l’intervallo più sono bassi i valori dell’istogramma

Dall'istogramma alla densità di probabilità

- Per introdurre il concetto di densità di probabilità *p(a)* di una variabile casuale continua a partire dall'istogramma occorrono i seguenti passi:

  - **1** - Utilizzare intervalli piccoli così da poter ritenere la ddp costante al loro interno

  - **2** - Dividere il valore dell'istogramma per la dimensione dell'intervallino (in modo che il risultato sia indipendente dalla dimensione dell'intervallino)

  - **3** - Utilizzare un numero molto elevato di prove (tanto più elevato quanto più piccolo è l'intervallino) in modo che frequenze relative e probabilità quasi coincidano

Processi casuali

- L'insieme di tutti i segnali deterministici (detti le **realizzazioni del processo**) generati da altrettante sorgenti uguali, ma indipendenti tra loro

- Per descrivere il processo casuale $x(t)$ si utilizzano soprattutto due funzioni:
  - **La densità di probabilità delle ampiezze del processo *p(a)***
  - **La funzione di autocorrelazione del processo $R_x(\tau)$**

- Se ci limitiamo a **processi stazionari** entrambe le funzioni NON dipendono dal tempo

Funzione di autocorrelazione

- La funzione di autocorrelazione è definita così

$$R_x(\tau) = E\left[x(t)x(t+\tau)\right] \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i(t)x_i(t+\tau)$$

- Se le 2 variabili casuali sono indipendenti, la funzione di autocorrelazione coincide con il modulo quadro del valor medio del processo casuale

- Se invece la variabile casuale $x(t+\tau)$ dipende dal valore assunto da $x(t)$, allora la funzione di autocorrelazione avrà un valore differente dal modulo quadro del valor medio del processo casuale

- L'autocorrelazione in t=0 coincide con la potenza media del processo casuale. $R_x(0)$ è il massimo valore che può assumere l'autocorrelazione

Il colore dei segnali

- Una sequenza di campioni è detta *bianca* se i suoi campioni sono incorrelati tra loro e quindi se la funzione di autocorrelazione è nulla per $\tau \neq 0$

- Possiamo *colorare* un segnale bianco, x_n filtrandolo con il filtro di risposta all'impulso h_n ottenendo il segnale y_n

- Il segnale campionato y_n è ottenuto convolvendo x_n e h_n

$$y_n = \sum_{k=0}^{K} x_{n-k} h_k = x_n * h_n$$

Il colore dei segnali

- Perché la convoluzione colora i segnali?
- Esempio:
  - $E[x_n^2] = 1 \quad E[x_n x_{n-\tau}] = 0 \quad \forall \tau \neq 0$
  - $h_0 = h_1 = 1/2$
  - $y_n = \frac{1}{2}(x_n + x_{n-1})$
- Calcoliamo l'autocorrelazione

$$R_y(0) = E[y_n^2] = \frac{1}{4}\left(E[x_n^2] + E[x_{n-1}^2] + 2E[x_n x_{n-1}]\right) = \frac{1}{2}$$

$$R_y(1) = E[y_n y_{n-1}] = \frac{1}{4}E\left[(x_n + x_{n-1})(x_{n-1} + x_{n-2})\right] = \frac{1}{4}$$

$$R_y(2) = E[y_n y_{n-2}] = \frac{1}{4}E\left[(x_n + x_{n-1})(x_{n-2} + x_{n-3})\right] = 0$$

Lo spettro di potenza

- Lo spettro di potenza $\mathbf{S_y(f)}$ è la trasformata di Fourier della funzione di autocorrelazione $\mathbf{R_y(\tau)}$

$$S_y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_y(\tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau$$

- Filtrando un generico segnale *x(t)* con un filtro avente risposta in frequenza *H(f)* si ottiene in uscita il segnale *y(t)* con spettro di potenza

$$S_y(f) = S_x(f) |H(f)|^2$$

Correlazione tra uscita e ingresso di un sistema LTI

- La **correlazione mutua** tra due processi è definita come

$$R_{xy}(\tau) = E[y(t)x(t+\tau)] \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i(t)x_i(t+\tau)$$

- Se i due processi casuali ***y(t)*** e ***x(t)*** sono rispettivamente l'uscita e l'ingresso di un sistema LTI la loro correlazione mutua è uguale alla convoluzione tra l'autocorrelazione dell'ingresso e la risposta all'impulso del sistema LTI:

$$R_{xy}(\tau) = R_x(\tau) * h(\tau)$$

- Se il segnale x(t) è un rumore bianco otteniamo

$$R_{xy}(\tau) = \delta(\tau) * h(\tau) = h(\tau)$$

- La correlazione mutua corrisponde con la risposta all'impulso del sistema