



Campionamento e DFT

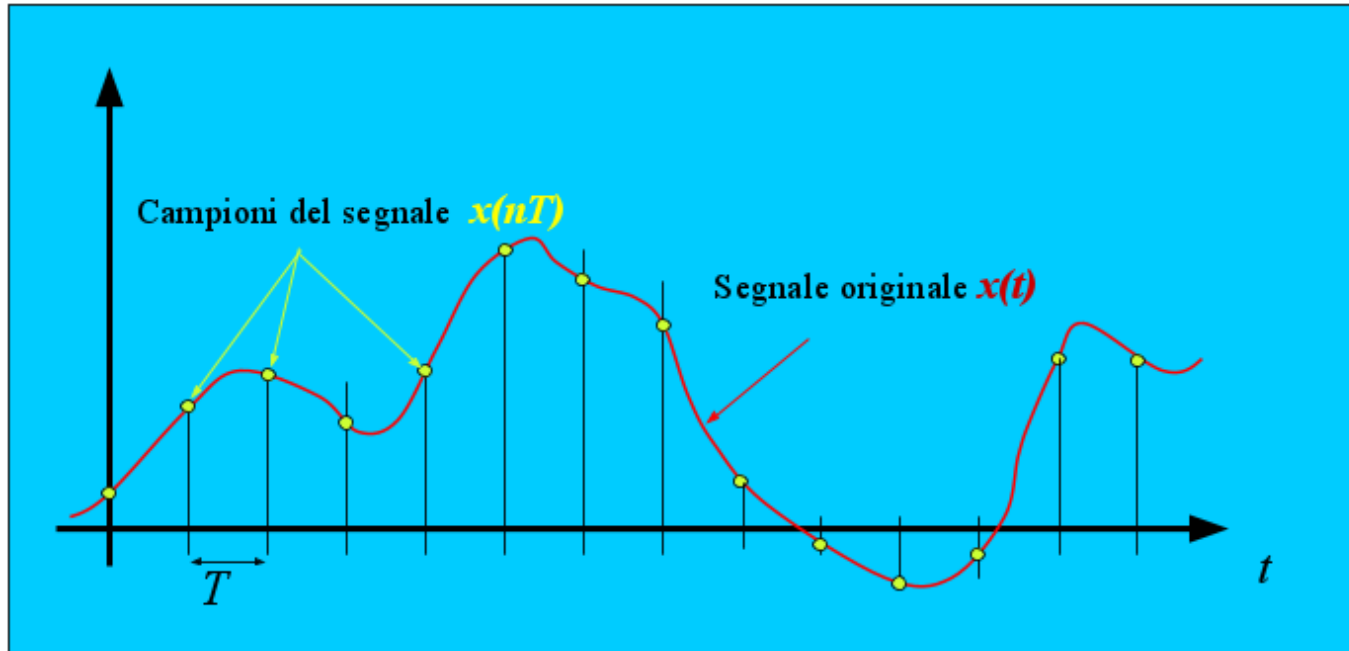
Laboratorio 3 - Segnali per le
Telecomunicazioni

Prof. Prati Claudio Maria

Autore: Federico Borra
Politecnico di Milano, DEIB
Email: federico.borra@polimi.it
Aprile'17, Ultima revisione: 05/05/17



□ Esempio di campionamento di un segnale



□ T = periodo di campionamento

□ $f_c = 1/T$ frequenza di campionamento



□ Ambiguità causata dal campionamento

- Definiamo due segnali in questo modo

$$x(t)$$

$$y(t) = x(t)e^{j2\pi k f_c t}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

- Ora campioniamo i due segnali con un periodo $T = 1/f_c$

$$x(t) \Rightarrow x(nT)$$

$$y(t) \Rightarrow y(nT) = x(nT)e^{j2\pi k f_c nT} = x(nT)e^{j2\pi k \frac{1}{T} nT} = x(nT)e^{j2\pi k n} = x(nT)$$

□ Campionando due segnali diversi otteniamo gli stessi campioni



- ❑ Cosa succede nel dominio della frequenza quando campiono un segnale?

$$x(nT) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t - nT) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$$

- ❑ Ricordiamo che il prodotto nel tempo equivale alla convoluzione in frequenza

► Trasformate dei segnali:

$$x(t) \Rightarrow X(f) \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) \Rightarrow \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

► Convoluzione in frequenza

$$X(f) * \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T}\right) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

- ❑ Otteniamo repliche dello spettro a distanza di $1/T$

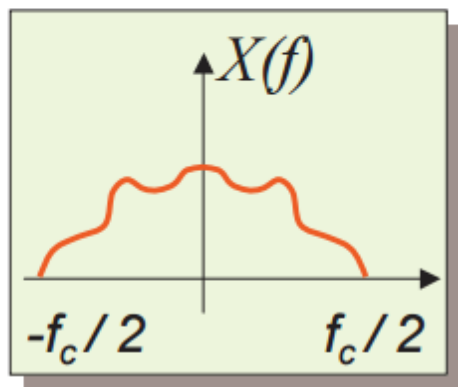


- Data la formula ricavata nelle slides precedenti

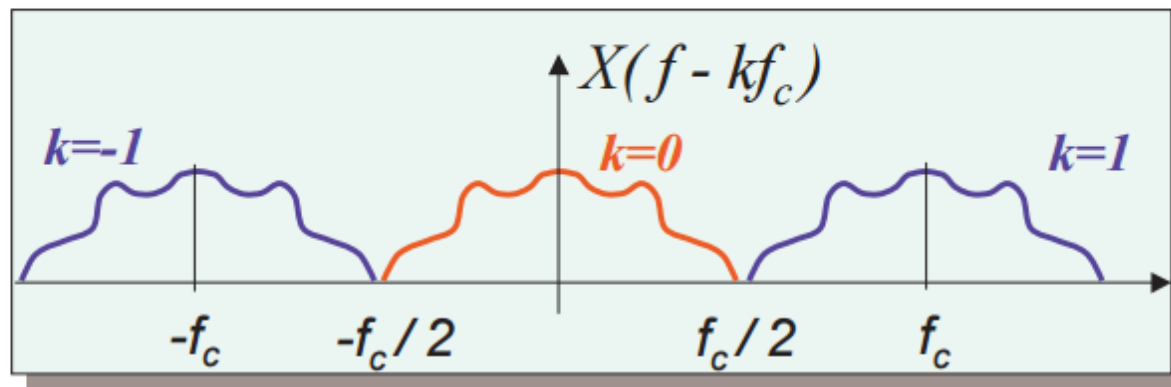
$$X(f) * \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T}\right) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

- Possiamo dedurre che, se un segnale è campionato con una frequenza f_c almeno doppia della massima frequenza contenuta, è perfettamente ricostruibile in quanto le repliche in frequenza non si sovrappongono

$$x(t) \xrightarrow{TF} X(f)$$



$$x(t) \exp(j2\pi f_c t) \xrightarrow{TF} X(f - kf_c)$$

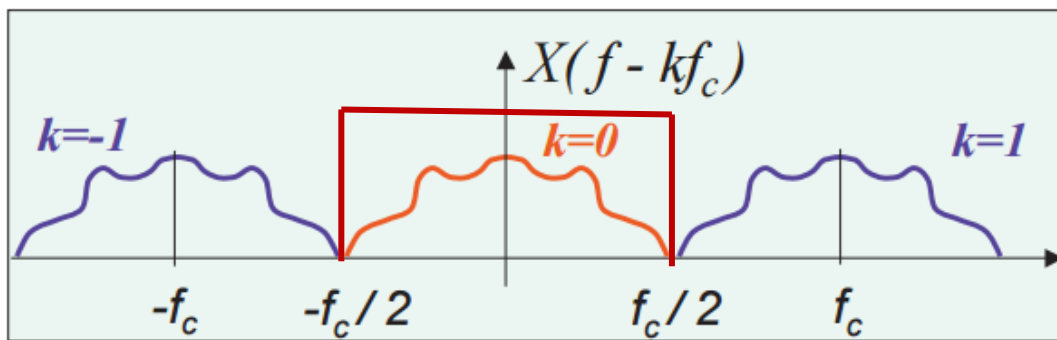




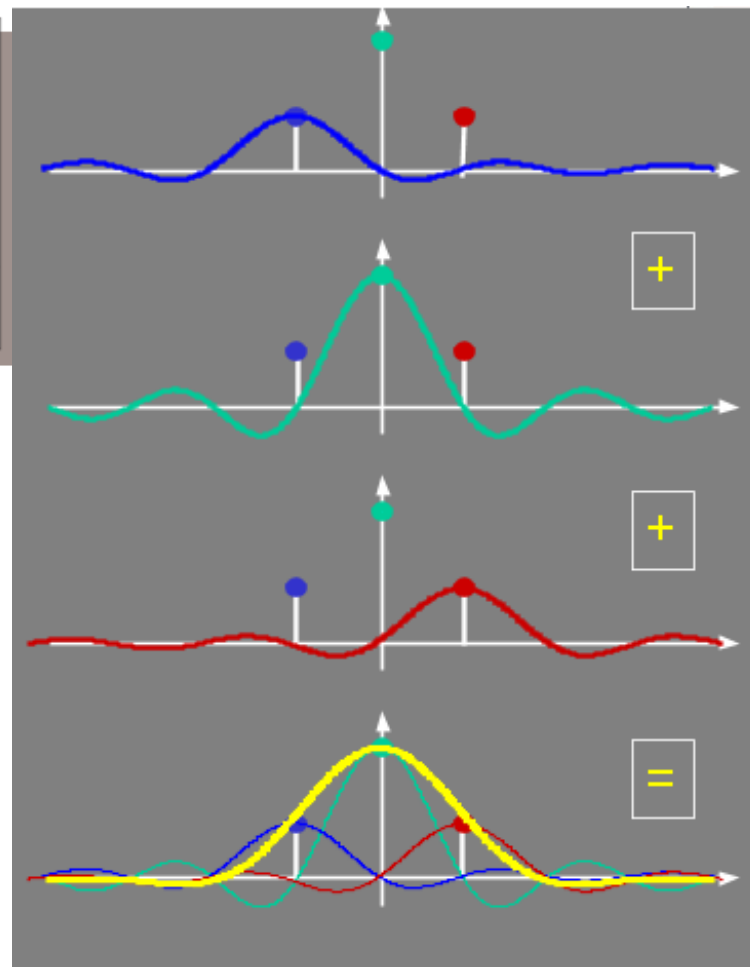
Campionamento di un segnale

6

- ❑ In particolare per ricostruirlo dobbiamo utilizzare un filtro passa basso (es. moltiplicazione per un rettangolo) come mostrato in figura



- ❑ Nel dominio del tempo, questa operazione corrisponde a convolvere il segnale campionato con l'anti-trasformata del filtro passa basso (es. nel caso del rettangolo questa è un seno cardinale).
- ❑ Operativamente è inutile passare attraverso un segnale impulsivo (che peraltro è un'astrazione). Basta sommare seni cardinali centrati ai tempi nT , con ampiezze massime uguali a $x(nT)$ e zeri in $t=mT$ per tutti gli $m \neq n$





□ Definizione

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi \frac{k}{N} n}$$

- Nella DFT sia il segnale nel tempo che in frequenza sono discreti
- La DFT considera inerentemente il segnale nel tempo come periodico



□ DFT di sequenze semplici

$$x[n] = \begin{cases} 1/2, & n = 0 \\ 1/4, & n = 1, N-1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

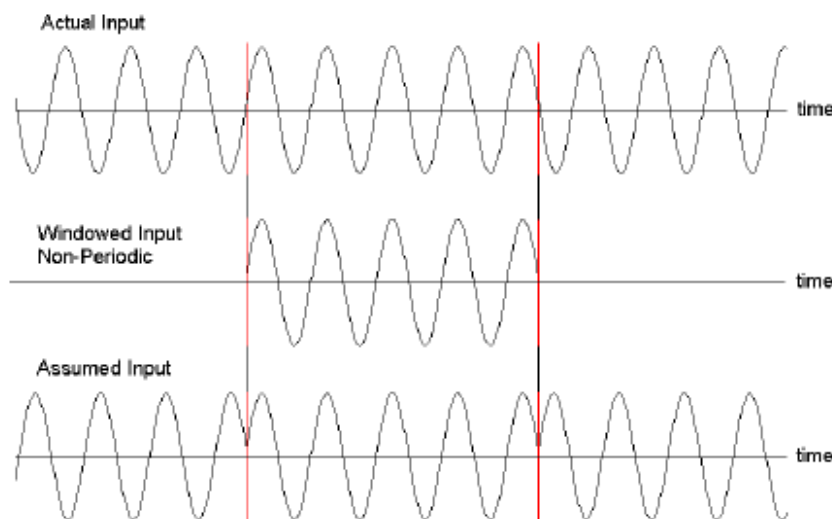
$$\begin{aligned} X_k &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi \frac{k}{N} n} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} e^{-j2\pi \frac{k}{N}} + \frac{1}{4} e^{-j2\pi \frac{k}{N} (N-1)} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} e^{-j2\pi \frac{k}{N}} + \frac{1}{4} \left(e^{-j2\pi k} e^{j2\pi \frac{k}{N}} \right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} e^{-j2\pi \frac{k}{N}} + \frac{1}{4} e^{j2\pi \frac{k}{N}} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cos\left(2\pi \frac{k}{N}\right) + \frac{1}{4} \cos\left(2\pi \frac{k}{N}\right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos\left(2\pi \frac{k}{N}\right) \end{aligned}$$

$$x[n] = \begin{cases} 1/2, & n = 0 \\ -1/4, & n = 1, N-1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} X_k &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi \frac{k}{N} n} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} e^{-j2\pi \frac{k}{N}} - \frac{1}{4} e^{-j2\pi \frac{k}{N} (N-1)} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} e^{-j2\pi \frac{k}{N}} - \frac{1}{4} \left(e^{-j2\pi k} e^{j2\pi \frac{k}{N}} \right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} e^{-j2\pi \frac{k}{N}} - \frac{1}{4} e^{j2\pi \frac{k}{N}} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \cos\left(2\pi \frac{k}{N}\right) - \frac{1}{4} \cos\left(2\pi \frac{k}{N}\right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos\left(2\pi \frac{k}{N}\right) \end{aligned}$$



□ DFT di un segnale sinusoidale



- Il segnale che viene ‘visto’ dalla DFT è quello chiamato ‘Assumed Input’ che non è più un segnale sinusoidale ‘puro’. Quindi, se non prendiamo un numero intero di cicli della sinusoide andiamo in contro ad un fenomeno chiamato **Spectral Leakage**. In frequenza otterremo quindi dei campioni diversi da 0 anche a frequenze diverse dalla frequenza della sinusoide.